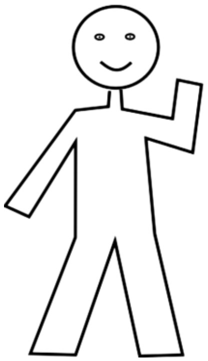
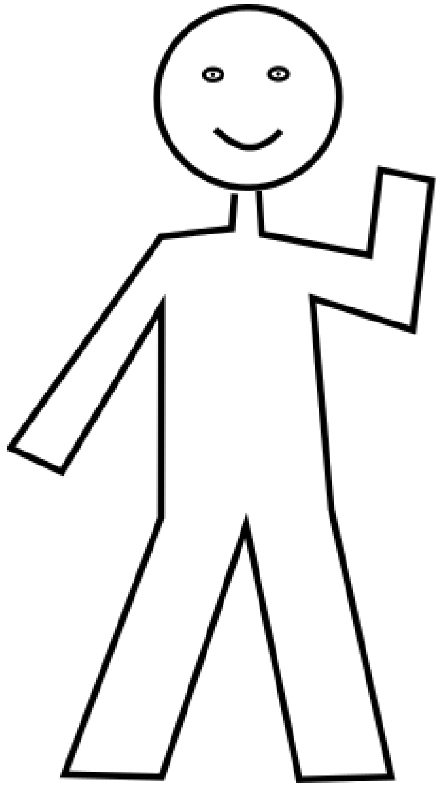
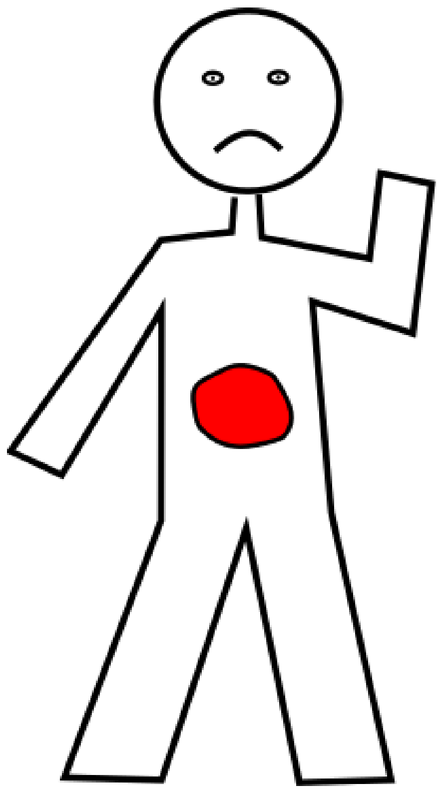
Numerische Optimierung



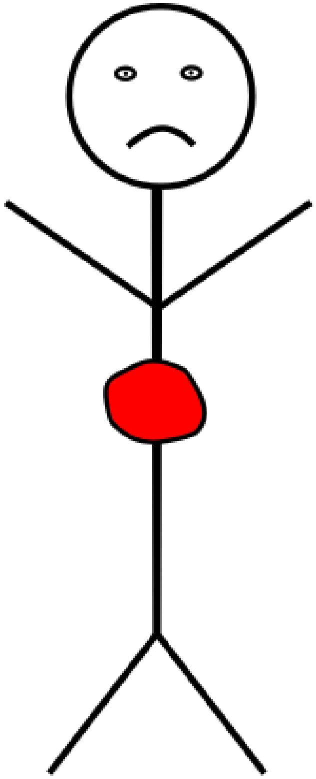
Optimale Steuerung einer Wärmequelle



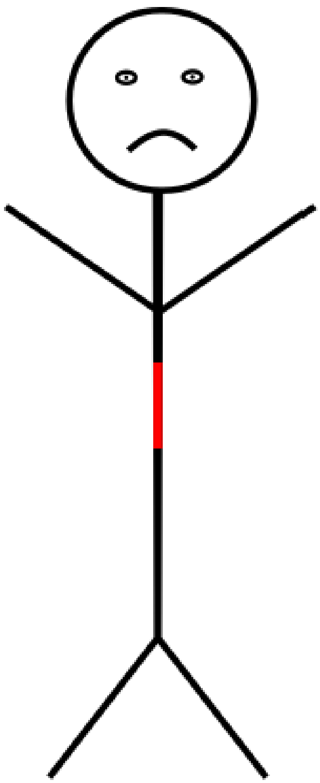
- Das ist Maxi.



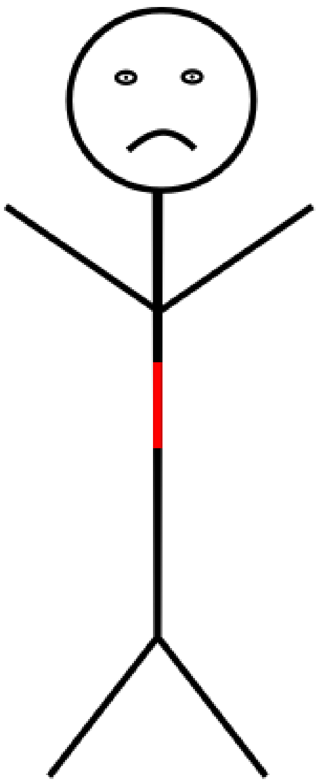
- Das ist Maxi.
- Maxi hat Krebs.



- Das ist Maxi.
- Maxi hat Krebs.
- Maxi ist eindimensional.

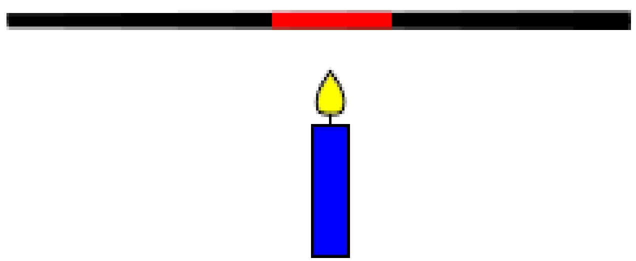


- Das ist Maxi.
- Maxi hat Krebs.
- Maxi ist eindimensional.
- Maxis Krebs ist eindimensional.



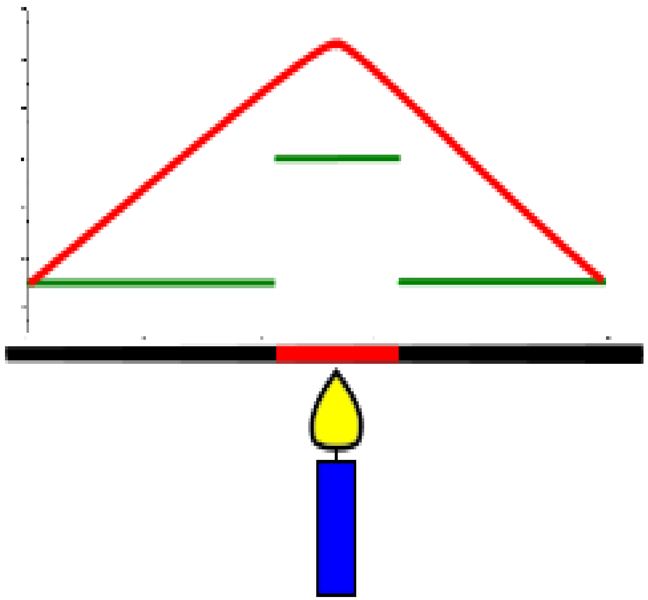
- Das ist Maxi.
- Maxi hat Krebs.
- Maxi ist eindimensional.
- Maxis Krebs ist eindimensional.
- Wir können ihm helfen!

- Stark vereinfacht sieht Maxi so aus.
- Maxi ist ein Intervall.

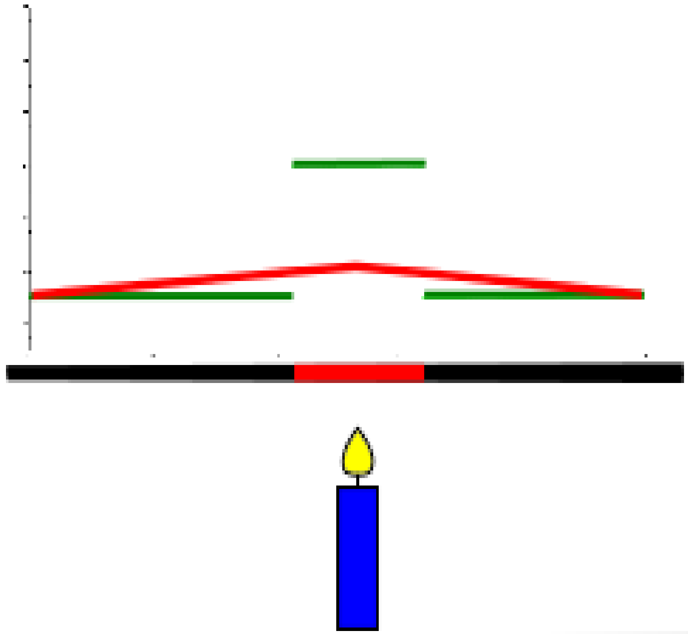


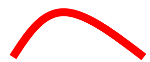
- Krebszellen halten hohe Temperaturen nicht aus.
- Wir führen Wärme zu.

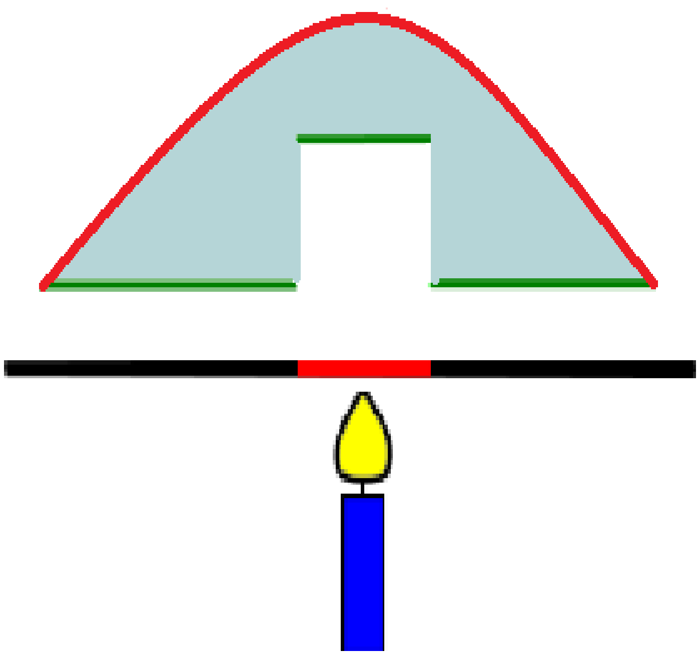
- Zu viel Wärme:
  - gesundes Gewebe wird geschädigt



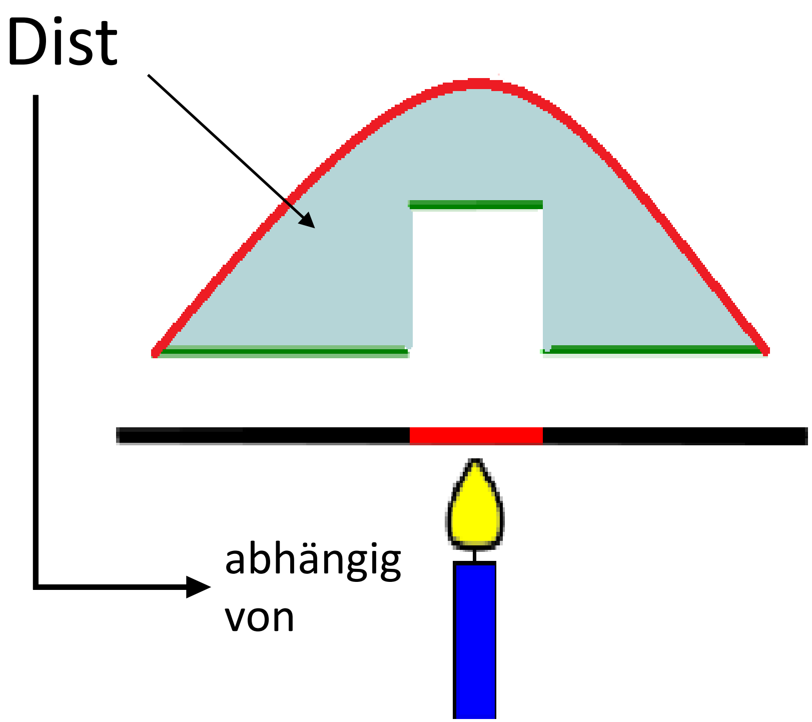
- Zu wenig Wärme:
  - Krebszellen werden nicht abgetötet

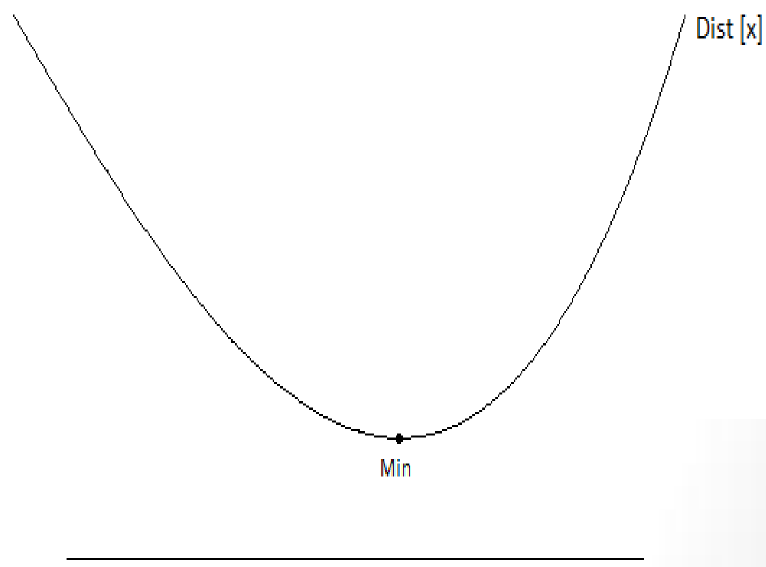


- Ziel:
  - Finde Wärmequelle, sodass entstehende Temperaturverteilung so nahe wie möglich an gewünschter Temperaturverteilung
  - → min Abstand zwischen  und 



- Funktion Dist = Abstand zwischen optimaler und tatsächlicher Temperaturverteilung in Abhängigkeit von der Stärke der Wärmeflussdichte





Methode 1: Probieren

- Prinzip:
  - Unterteilung des zu Untersuchenden Intervalls in Teilintervalle (gleich groß; z.B. bei Intervall 0-1000: 1000 Teilintervalle)
  - Berechnung aller Funktionswerte
  - Bestimmung des kleinsten Funktionswert

Methode 1: Probieren

Vorteile

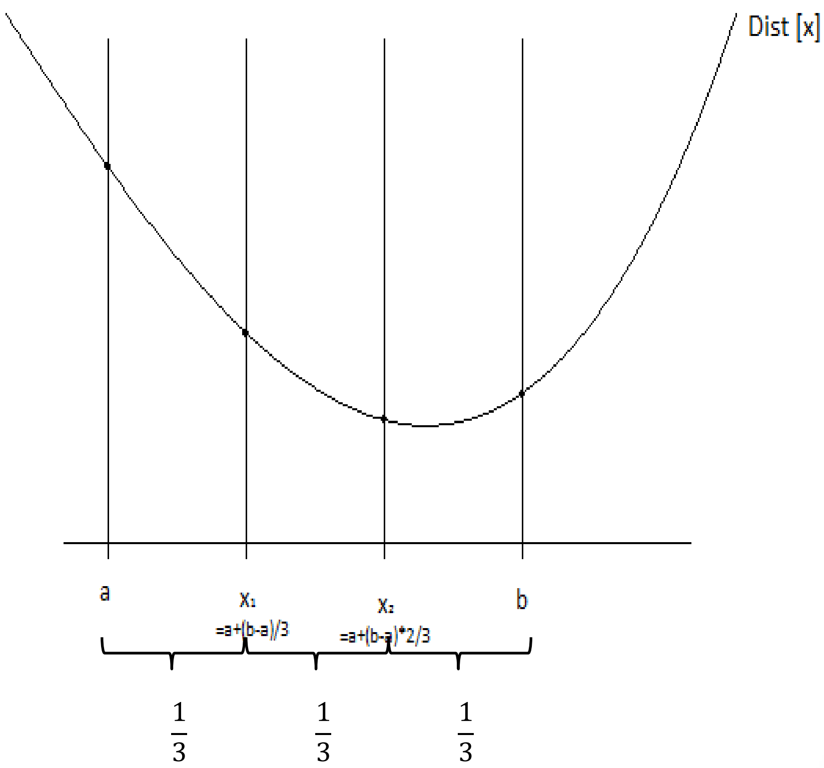
- Sehr geringer Programmieraufwand

Nachteile

- Viele Funktionsauswer-tung erforderlich
- Trotz vieler Auswertungen schlechte Genauigkeit

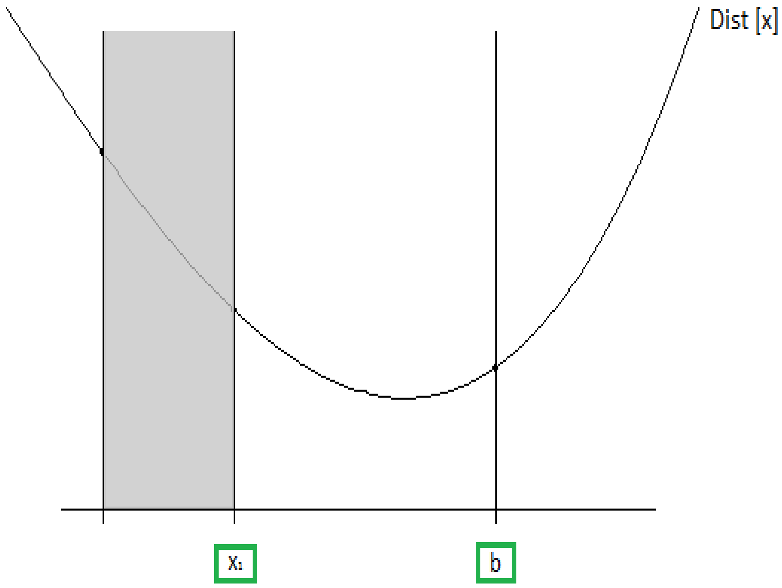
Methode 2: Intervallteilung

- Voraussetzung: Konvexe Funktion
- Unterteilung in 3 Intervalle
- 4 Punkte + zugehörige Funktionswerte
- f(a)>f(x1)>f(x2) → Minimumstelle kann nicht in Intervall [a;x1] liegen

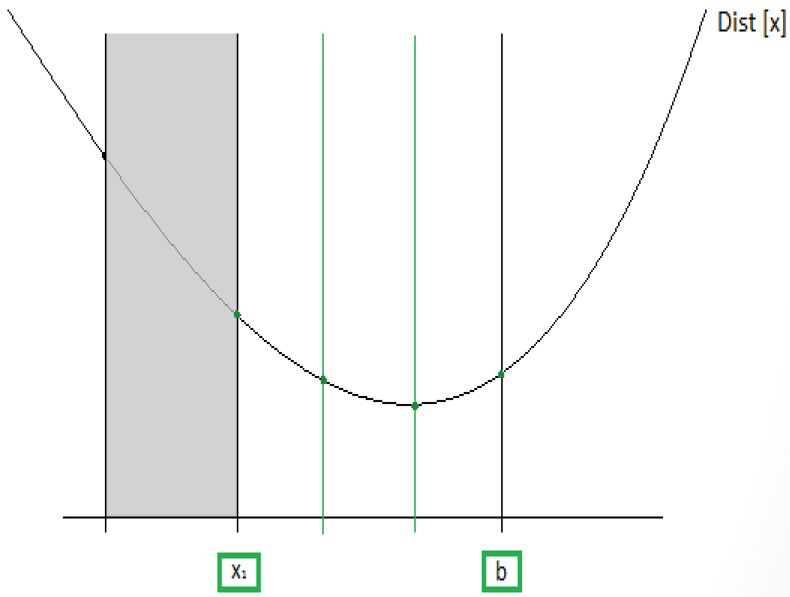


Methode 2: Intervallteilung

- Neues Intervall [x1;b]

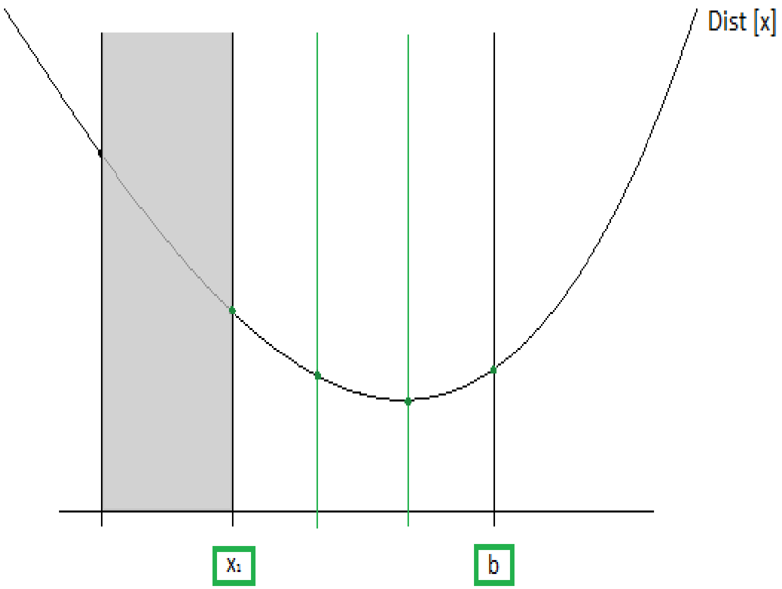


- In Drittel einteilen



Methode 2: Intervallteilung

- Intervallteilung wiederholen bis sich Grenzen nur mehr minimal unterscheiden

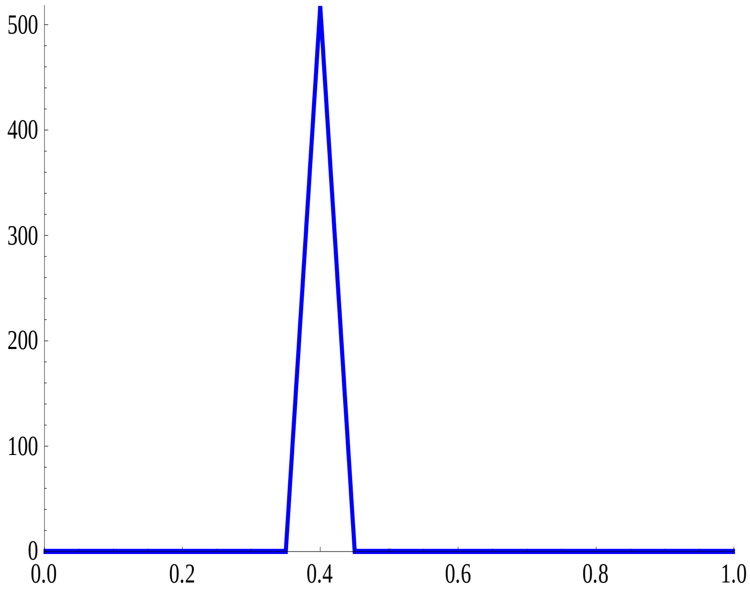


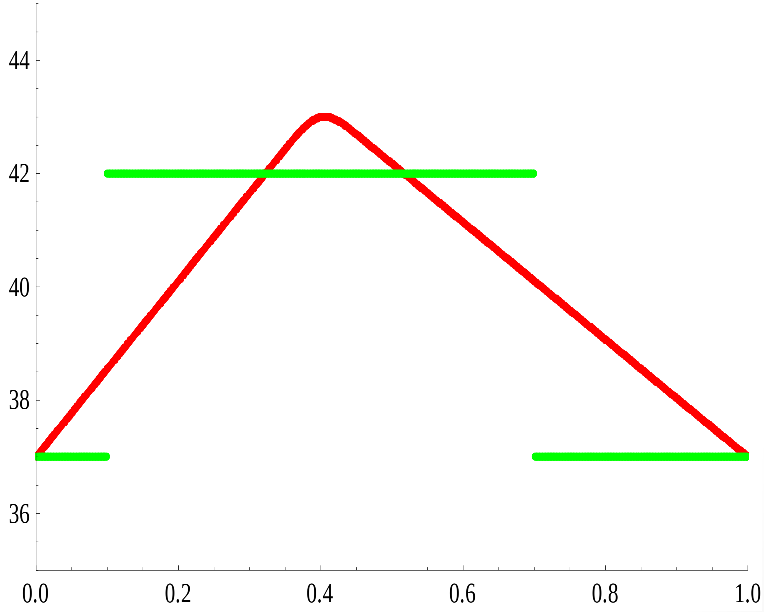
$$\text{Minimum} = \frac{linke\ Grenze + rechte\ Grenze}{2}$$

$$\approx 517{,}62$$

Methode 2: Intervallteilung

- Abstand zwischen tatsächlichem und optimalem Temperaturverlauf ist am geringsten, wenn die Stärke der Wärmeflussdichte $\approx 517{,}62\ {}^{Watt}/_{m2}$ beträgt





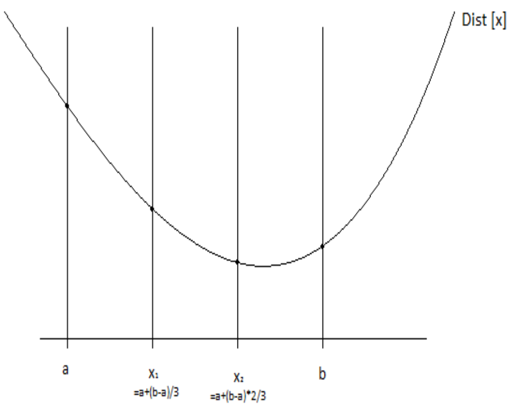
Methode 2: Intervallteilung

Vorteile

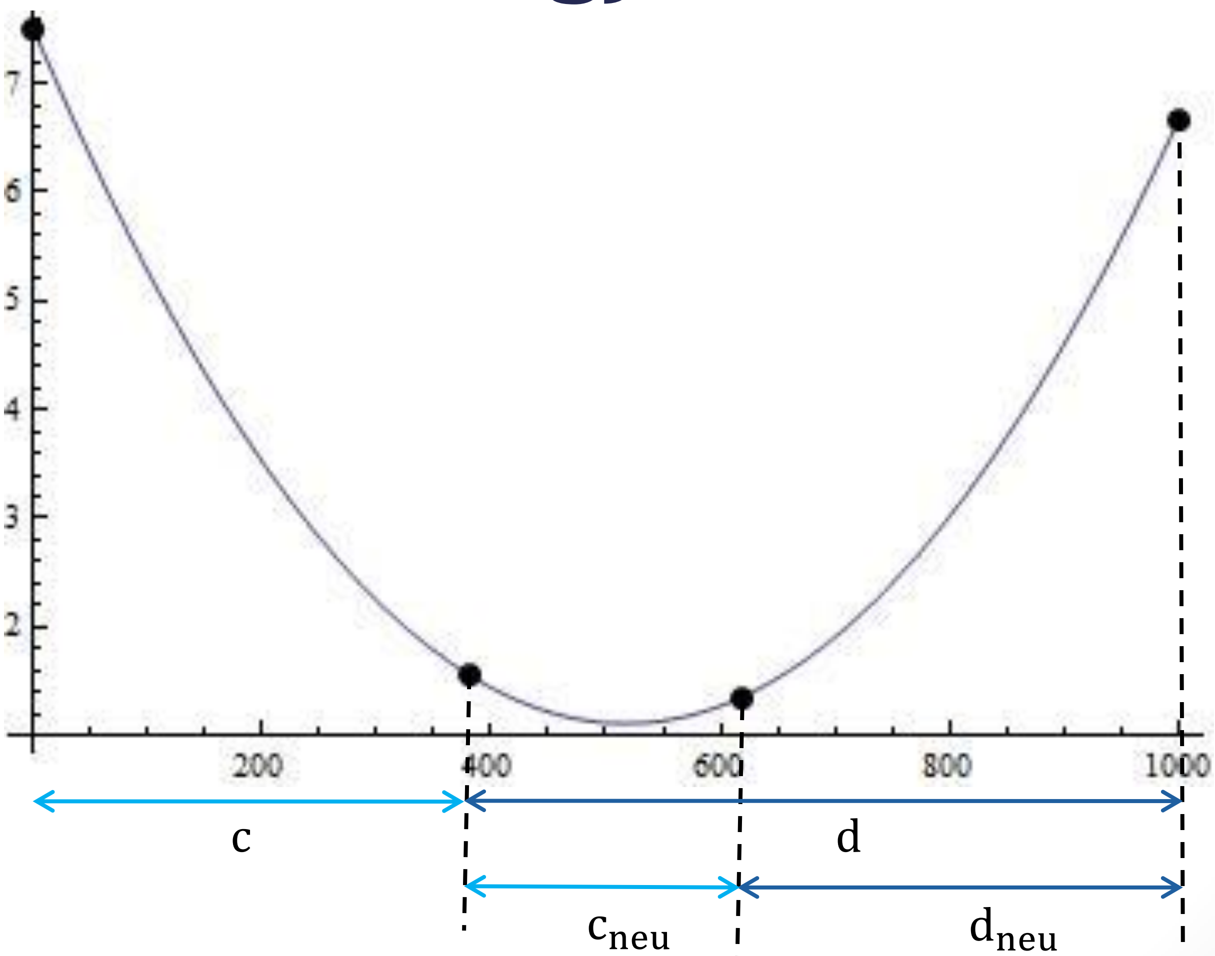
- Im Intervall [0;1000] und Toleranz von 0.000001 Nachkommastellen wird Intervallteilung nur 52 mal durchgeführt
- Weniger Funktions-auswertungen als bei Probieren

Nachteile

- Ein Funktionswert könnte weiter verwendet werden, wird jedoch verworfen
- Funktionsauswertung benötigt Zeit



Methode 3: Goldener Schnitt (Intervallteilung)



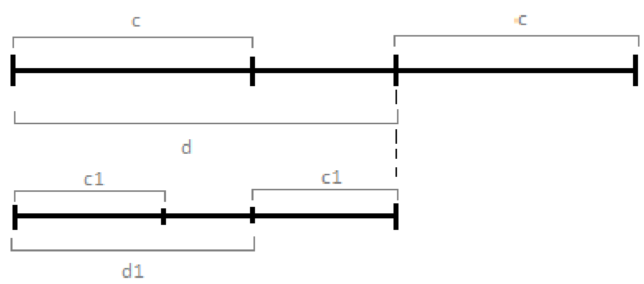
Methode 3: Goldener Schnitt

Herleitung des Verhältnisses

- $\frac{d+c}{d} = \frac{d}{c}$
- $\frac{d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$

$$\frac{d}{c} = \varphi$$
$$\frac{c}{d} = \frac{1}{\varphi}$$

- $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$
- $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
- $\varphi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$
- ($\varphi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$; ist aber negativ)



Methode 3: Goldener Schnitt

Vorteile

- Nur die Hälfte der Funktionswerte wird benötigt
- schneller als die vorherige Methode

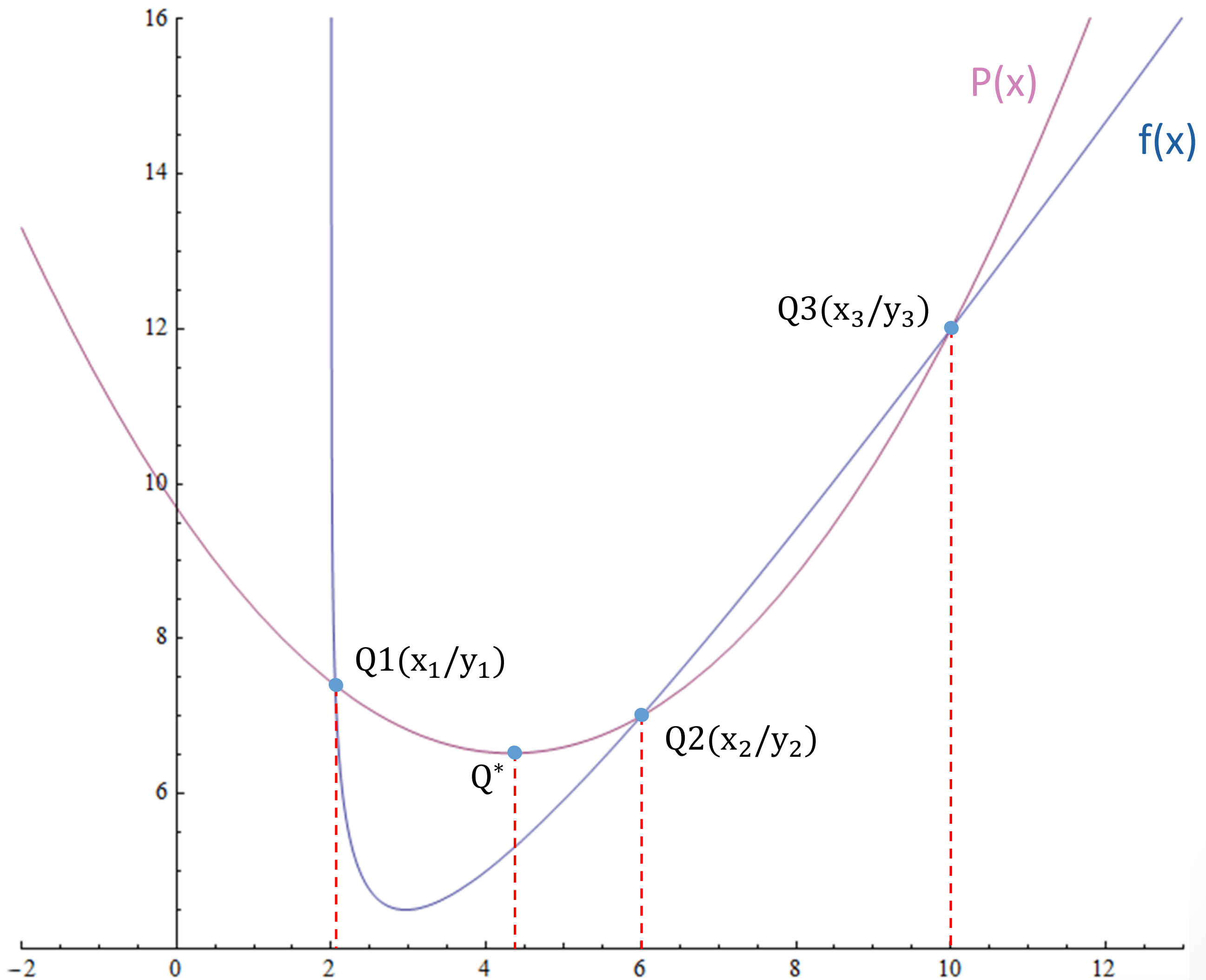
Nachteile

- Benötigt einige Durchläufe

Methode 4: Interpolation

- lat. interpolare „verfälschen“
- Prinzip:
  - Annähern eines quadratischen Polynoms $P(x)=a*x^2+b*x+c$ an Zielfunktion Dist(x)=? mit 3 Funktionspunkten
  - Finden des Minimums der Annäherung mittels Ableiten und Nullsetzen der Ableitung
  - Punkt an Stelle des Minimums verwenden für neue Näherung

Methode 4: Interpolation



Methode 4: Interpolation

- Lösen des entstehenden Gleichungssystems:
  I. $a * {x_1}^2 + b * x_1 + c = \mathrm{Dist}(x_1)$
  II. $a * {x_2}^2 + b * x_2 + c = \mathrm{Dist}(x_2)$
  III. $a * {x_3}^2 + b * x_3 + c = \mathrm{Dist}(x_3)$
- $P'(x^*) = 0 \;\rightarrow\; x^* = -\frac{b}{2*a}$
- Neue Berechnung mit Q* und den beiden nächsten Punkten bis bestimmte Bedingung erfüllt (z.B. Abweichung von P(x) von Dist(x) bei Minimum von P(x) unter bestimmtem Wert)

Methode 4: Interpolation

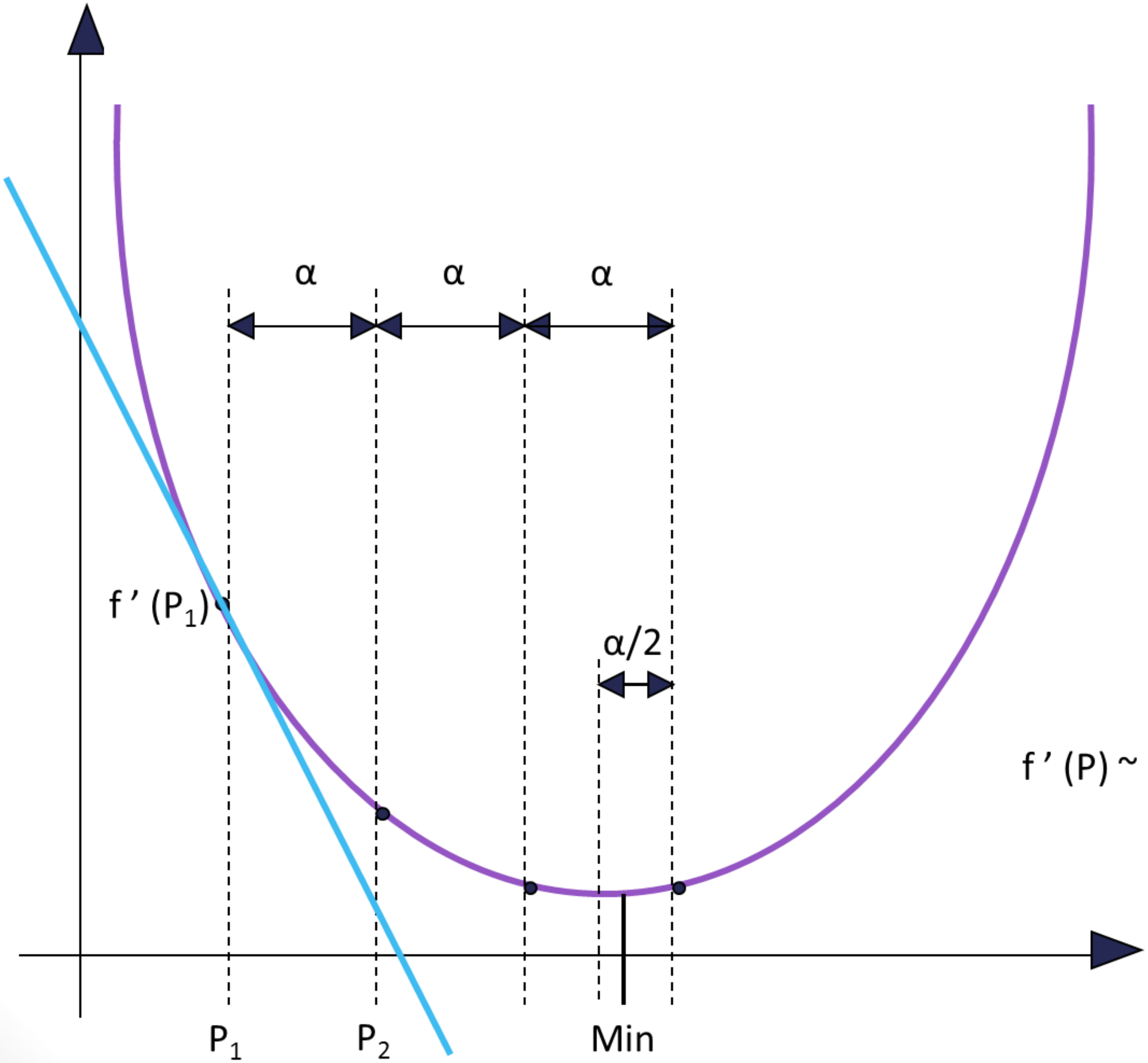
Vorteile

- Sehr schnell und genau für Funktionen ähnlich einer quadratischen Funktion
- Ableitung der Annäherung leicht berechenbar

Nachteile

- Eventuelle Probleme bei Funktion mit wesentlich anderem Aussehen als quadratische Funktion → andere Annäherungsfunktion verwenden

Methode 5: Gradientenverfahren



K < 0 ⇨ P + α

K > 0 ⇨ P - α

K = 0 ⇨ Min

$$f'(P) \sim \frac{f(P+h) - f(P)}{h}$$

Methode 5: Gradientenverfahren

- Wählen Punkt: P1
- Rechnen uns mit Dist fP aus
- Führen Differenzenquozient durch
- Adieren α / Subtrahieren α