Das Münzspiel

In[19]:=
```
MatrixForm[{{1, "2⁰", "0001"}, {5, "2²+2⁰", "0101"}, {10, "2³+2¹", "1010"}}]
```

Out[19]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^0 & 0001 \\ 5 & 2^2+2^0 & 0101 \\ 10 & 2^3+2^1 & 1010 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Zeilen dieser Matrix stellen jeweils die Zahlen Eins, Fünf und Zehn dar.
Zum Beispiel lässt sich die Eins, als Summe von Zweierpotenzen (1. Zeile, 2. Spalte) und als Binärzahl (1.Zeile, 3. Spalte) darstellen.

Für die Gewinnstrategie wird nur die Binärdarstellung (also die 3. Spalte) eine Rolle spielen.

In[20]:=
```
MatrixForm[{{"0001"}, {"0101"}, {"1010"}}]
```

Out[20]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0101 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Nun berechnet man jeweils die Spaltensumme und erhält:

In[21]:=
```
MatrixForm[{{"1112"}}]
```

Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1112 \end{pmatrix}$$

Spieler1 muss nun eine (da man nur von einem Haufen ziehen darf) der binären Zahlen 0001, 0101, 1010 so verändern, dass jede Spaltensumme eine gerade Zahl darstellt.
Für den Eröffnungszug ergibt sich daher nur ein sinnvoller Spielzug: Man nimmt vom Zehnerstapel sechs Münzen weg, sodass für die binäre Darstellung der Anzahl der Münzen pro Haufen gilt:

In[22]:=
```
MatrixForm[{{"0001"}, {"0101"}, {"0100"}}]
```

Out[22]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0101 \\ 0100 \end{pmatrix}$$

Für die Spaltensumme gilt nun :

In[23]:=
```
MatrixForm[{{"0202"}}]
```

Out[23]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0202 \end{pmatrix}$$

Die Spaltensummen sind nun jeweils gerade und Spieler1 befindet sich somit in einer Gewinnposition.
Spieler2 ist an der Reihe und er muss einen Spielzug durchführen. Somit verändert er mindestens eine der Spaltensummen in eine ungerade Zahl, was eine Verlustposition darstellt. Für Spieler2 ist es daher unmöglich in eine Gewinnposition (=alle Spaltensummen gerade) zu kommen.
Wenn Spieler1 nach diesem Prinzip weiter spielt, wird sich zum Schluss die Situation ergeben, dass nur mehr zwei Stapeln mit jeweils einer Münze übrig bleiben. Spieler2 muss dann eine der Münzen nehmen und für Spieler1 bleibt dann die letzte Münze übrig, was bedeutet, dass er gewonnen hat.

Diese Gewinnstrategie wird verständlicher, wenn man einfach ein paar Mal das Spiel nach diese Strategie spielt.

Ein mögliches Spiel würde wie folgt ablaufen:

Spieler1 zieht sechs Münzen des Zehnerstapels:

```
In[24]:= MatrixForm[{{"0001"}, {"0101"}, {"0100"}}]
```

Out[24]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0101 \\ 0100 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme :

```
In[25]:= MatrixForm[{{"0202"}}]
```

Out[25]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0202 \end{pmatrix}$$

Spieler2 zieht (beispielsweise) drei Münzen des Fünferstapels :

```
In[26]:= MatrixForm[{{"0001"}, {"0010"}, {"0100"}}]
```

Out[26]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0100 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme :

```
In[27]:= MatrixForm[{{"0112"}}]
```

Out[27]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0112 \end{pmatrix}$$

Spieler1 muss daraufhin eine Münze desViererstapels ziehen :

```
In[28]:= MatrixForm[{{"0001"}, {"0010"}, {"0011"}}]
```

Out[28]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0011 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme :

```
In[29]:= MatrixForm[{{"0022"}}]
```

Out[29]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0022 \end{pmatrix}$$

Spieler2 zieht (beispielsweise) zwei Münzen des Dreierstapels :

In[30]:=
```
MatrixForm[{{"0001"}, {"0010"}, {"0001"}}]
```

Out[30]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0001 \\ 0010 \\ 0001 \end{pmatrix}$$

Spaltensumme :

In[31]:=
```
MatrixForm[{{"0012"}}]
```

Out[31]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0012 \end{pmatrix}$$

Spieler1 muss daraufhin den gesamten Zweierstapel ziehen. Es bleiben nur mehr zwei Stapel mit jeweils einer Münze übrig. Spieler2 ist an der Reihe und muss sich eine der beiden Münzen nehmen. Spieler1 kann anschließend den letzten Spielzug durchführen und hat somit gewonnen.

Dieses Münzspiel ist bekannt unter dem Namen "Nim". Charles Bouston gelang es 1902 diese Gewinnstrategie zu finden.

Das Binärsystem (Dualsystem)

Jede ganze Zahl lässt sich eindeutig aus nur zwei Ziffern (Null, Eins) darstellen. Man zerlegt dazu die Zahl in eine Summer aus Zweierpotenzen.

z. B (wie vorher):
$10 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0$

Damit ergibt sich für Zehn die Binärdarstellung : 1100

In[32]:=