Symbolisches Differenzieren

Ralf Hemmecke

Research Institute for Symbolic Computation
Johannes Kepler University Linz, Austria

12-Feb-2012

Projektvorstellung

- Repräsentation mathematischer Ausdrücke
  - ganze Zahlen, -2, 7, $10^{10^{10}}$
  - rationale Zahlen, $-\frac{123}{45678}$
  - Polynome über rationalen Zahlen, $\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 1$
  - rationale Funktionen, $\frac{3x^5 - x^2 + 1}{x^{100} - 8}$
  - trigonometrische Funktionen, $\sin(x)$, $\tan(x)$
  - Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus
  - $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^b
  - Kompositionen obiger Funktionen, $\sin(\exp(x^3 + \frac{1}{x})^{\tan(2x+1)})$
- Differentiation
  - Differenzieren einfacher Funktionen
  - Differentiationsregeln für zusammengesetze Funktionen
- Programmierung im Computeralgebrasystem **FriCAS**

Outline

Ganze Zahlen

- int in C repräsentiert 32/64-Bit-Zahlen
- Ganze Zahlen sind Felder von Maschinenwörtern
- Operationen und Speicherverwaltung über spezielle Software, z.B. GNU MP

rationale Zahlen

- rationale Zahl ist Paar (z, n) von ganzen Zahlen
- Operationen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$
- GGT ganzer Zahlen? Kürzungsregeln?
- Was wird durch $(1, 0)$ repräsentiert?

Symbolische Ausdrücke

- Datenrepräsentation
  - $\sin(x) \mapsto$ `("sin" x)`
  - $a + b + c \mapsto$ `("+" a b c)`
  - $\frac{\sin(\exp(x+1))}{x^2} \mapsto$
    `("/" ("sin" ("exp" ("+" x 1))) ("^" x 2))`
- Simplifikation
  - $1 + 1 \mapsto$ `("+" 1 1)` $\mapsto 2$
  - $x + x \mapsto$ `("+" x x)` $\mapsto$ `("*" 2 x)`
  - $\sqrt{x^2} \mapsto$ `("nthroot" ("^" x 2) 2)` $\mapsto$ `x` (?)

Körper

- Ein Körper ist eine algebraische Struktur, die aus einer Menge mit 2 Operationen besteht und gewisse Eigenschaften erfüllt.

Differentiation

Definition

Eine Derivation über einem Körper K ist eine Abbildung $d : K \to K$ mit folgenden Eigenschaften.

- $d(a+b) = d(a) + d(b)$ für alle $a, b \in K$
- $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + a \cdot d(b)$ für alle $a, b \in K$

Outline

Installation

1. Kopieren Sie **fricas.vdi** auf den Desktop.
2. Starten Sie VirtualBox.
3. Erzeugen Sie eine neue Maschine.
   Name=fricas, Hauptspeicher=1 GB
4. Benutzen Sie fricas.vdi als Festplatte.
5. Starten Sie die virtuelle Maschine.
6. Sie haben jetzt ein minimales Ubuntu 11.10 mit einstalliertem CAS **FriCAS**.
7. Als Texteditor benutzen Sie **mousepad** oder **emacs**.

Erste Schritte mit FriCAS

- FriCAS starten (icon, fricas, efricas)
- HyperDoc
- Interpreter vs. Compiler

FriCAS domain

- `)quit` — FriCAS beenden
- `)clear all` — reset
- `)clear value VARNAME` — variable VARNAME löschen

FriCAS domain

```
)abbrev domain DEX DExpression

Z ==> Integer
Q ==> Fraction Z
D ==> Product(String, List %)

DExpression: MExpressionCategory with
    differentiate: % -> %
  == MExpression add
    differentiate(z: %): % ==
      -- put your differentiation code here
```

SPAD

- Einrückung statt geschweifter Klammern
- Variablenzuweisung

```
a: Integer := 3 + v
a := 2*a
```

- Schleifen

```
for i in 1..9 repeat
for l in list repeat
```

- Verzweigung

```
if a ~= b then ... else ...
```

- (Funktions-)Block verlassen

```
differentiate(z: %): % ==
    a = b => valtrue
    valfalse
```

SPAD

- λ-Ausdrücke (= anonyme Funktionen) statt Funktionsdefinitionen

```
a +-> a+2
(a: Integer): Integer +-> a+2
foo(a: Integer): Integer == a+2
```

Typen

- `String, "I'm a string."`
- `Integer, 0, -5539`
- `Fraction(Integer), -1/3, 22/7`
- `List(Integer), [12,2,-88]`
- `Product(String, List Integer), ["+", [3,4]]`
- `error "error message"`
- `%` ist Typ von `self`, `this`, etc.