

# Analyse von Algorithmen

Christoph Koutschan

Research Institute for Symbolic Computation  
Johannes Kepler Universität Linz, Austria

8. Februar 2009



# Was ist ein Algorithmus?

**Antwort:** Verfahren zur Lösung eines Problems



# Was ist ein Algorithmus?

**Antwort:** Verfahren zur Lösung eines Problems

**Frage:** Woher kommt dieses seltsame Wort?



## Was ist ein Algorithmus?

**Antwort:** Verfahren zur Lösung eines Problems

**Frage:** Woher kommt dieses seltsame Wort?

**Antwort:** محمد بن موسى أبو جعفر الخوارزمي



# Was ist ein Algorithmus?

**Antwort:** Verfahren zur Lösung eines Problems

**Frage:** Woher kommt dieses seltsame Wort?

**Antwort:** محمد بن موسى ابو جعفر الخوارزمي

Muhammad ibn Musa, Abu Dscha'far al-Chwarizmi (ca. 780 – 850)



## Beispiel für einen Algorithmus

### Ein gut gebachens von Aepffeln.

**D**ie gute süsse Aepffel/ odere andere/ so truckener  
Care seynd/ die besten so man haben mag/ schäle sie/ schneids  
dünn/ wirffs in ein heisses schmalz / decks gehob zu / laß zu  
einem Nuß kochen/ zurührs/ vnd laß so trucken kochen/ als es ohn  
angebrant seyn kã: Darnach rühre Ingwer darein/dz es gar rösch  
darvon wird/ Safran/ Weinbeer vnd Eyer die zuvor wol geklopfe  
vnd gesiehen/drey oder vier/ nach dem es ist / auch Zucker/ wenn es  
dir gellebt/wiltu/ so rühre gut gerieben Eyerbrot vnd ander Sem  
mel darein: aber darnach mustu desto mehr Eyer nemen / bereits  
im Mörsel oder Rachel/bachs wie ein ander Mörselbrot/ wiltu/ so  
schneid Mandel gar klein vnd dünn / als weren sie gehoblet / oder  
grüne Nußkern: aber die nicht für francke / Wie es dir gellebt/so  
mach eine brüh darüber/ wiltu dann / so machs zu Krapffen in Of  
flaten oder ein gewürzten teig.



# Algorithmen in der Mathematik

**Beispiel:** Ein Algorithmus aus der Schule: Multiplikation von zwei Zahlen

$$5061 * 6592$$



# Algorithmen in der Mathematik

**Beispiel:** Ein Algorithmus aus der Schule: Multiplikation von zwei Zahlen

$$\underline{5061 * 6592}$$

$$6592$$

$$39552$$

$$32960$$



# Algorithmen in der Mathematik

**Beispiel:** Ein Algorithmus aus der Schule: Multiplikation von zwei Zahlen

$$\begin{array}{r} 5061 * 6592 \\ \hline 6592 \\ 39552 \\ 32960 \\ \hline 33362112 \end{array}$$



# Algorithmen in der Mathematik

**Beispiel:** Ein Algorithmus aus der Schule: Multiplikation von zwei Zahlen

$$\begin{array}{r} 5061 * 6592 \\ \hline \phantom{5061 * 6592} 6592 \\ \phantom{5061 * 6592} 39552 \\ \phantom{5061 * 6592} 32960 \\ \hline 33362112 \end{array}$$

Für diese Multiplikation braucht der Computer etwa 300ns.



## Wie sieht es bei größeren Zahlen aus?

**Beispiel:** Eine Zahl mit 900 Stellen:

884179657208644526261526105923705771436673658202292155  
852141217653834302040229662357444157207663362812745913  
422923390580865326764600012738792571964624673882450372  
368112452831058871164830280476667770938784360428380452  
460070409391957281749740442983706170571470496194644137  
221446851954506555071852584008954090561473262407126991  
447047425208087179102560399204413030896605188777650283  
405158189205248781894196865799897823926917239470778405  
344715079079550000483148799388365685654890112397340517  
318122437771635509039555978083579487431733014575127645  
303489408400270880363376847199426952543373904623791669  
210099932656453969701071277055226987850033151088531709  
892636676915444575813079201413172434030442278882443898  
478115659049570658318651110741655752803165077371675567  
966946060610932632375698698052212570803871969055289849  
546772777494095876930546892657051401646944704640636295  
18641269660376843413585013329353808826934783867101743



## Oder bei ganz großen???

**Beispiel:** Eine Zahl mit 100.000.000 Stellen:



Wie lange dauert das Multiplizieren von solch großen Zahlen?



# Fragestellungen

**Wie kann man solche Vorhersagen treffen?**



# Fragestellungen

## **Wie kann man solche Vorhersagen treffen?**

—→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .



# Fragestellungen

**Wie kann man solche Vorhersagen treffen?**

—→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .

**Geht es überhaupt besser?**



# Fragestellungen

## Wie kann man solche Vorhersagen treffen?

→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .

## Geht es überhaupt besser?

→ Oft kann man eine untere Schranke für die Komplexität angeben, in unserem Beispiel  $O(n)$ .  
Verdacht: Es geht besser?



# Fragestellungen

## Wie kann man solche Vorhersagen treffen?

→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .

## Geht es überhaupt besser?

→ Oft kann man eine untere Schranke für die Komplexität angeben, in unserem Beispiel  $O(n)$ .  
Verdacht: Es geht besser?

## Falls ja, wie kann man einen besseren Algorithmus konstruieren?



# Fragestellungen

## **Wie kann man solche Vorhersagen treffen?**

—→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .

## **Geht es überhaupt besser?**

—→ Oft kann man eine untere Schranke für die Komplexität angeben, in unserem Beispiel  $O(n)$ .  
Verdacht: Es geht besser?

## **Falls ja, wie kann man einen besseren Algorithmus konstruieren?**

—→ Damit werden wir uns in der kommenden Woche beschäftigen!



# Fragestellungen

## **Wie kann man solche Vorhersagen treffen?**

→ Indem man den Algorithmus analysiert und seine Komplexität berechnet, in unserem Beispiel  $O(n^2)$ .

## **Geht es überhaupt besser?**

→ Oft kann man eine untere Schranke für die Komplexität angeben, in unserem Beispiel  $O(n)$ .  
Verdacht: Es geht besser?

## **Falls ja, wie kann man einen besseren Algorithmus konstruieren?**

→ Damit werden wir uns in der kommenden Woche beschäftigen!

## **Wie kann man zwei verschiedene Algorithmen, die das gleiche Problem lösen, vergleichen?**



# Erkenntnis

Der “Schul-Algorithmus” zum Multiplizieren von zwei Zahlen ist nicht optimal!



# Erkenntnis

Der “Schul-Algorithmus” zum Multiplizieren von zwei Zahlen ist nicht optimal!

Es gibt viele Multiplikations-Algorithmen, die besser sind.



# Erkenntnis

Der “Schul-Algorithmus” zum Multiplizieren von zwei Zahlen ist nicht optimal!

Es gibt viele Multiplikations-Algorithmen, die besser sind.

**Vergleich:** Multipliziere zwei Zahlen mit 100.000.000 Stellen:

- “Schul-Algorithmus”: 32 Jahre



# Erkenntnis

Der “Schul-Algorithmus” zum Multiplizieren von zwei Zahlen ist nicht optimal!

Es gibt viele Multiplikations-Algorithmen, die besser sind.

**Vergleich:** Multipliziere zwei Zahlen mit 100.000.000 Stellen:

- “Schul-Algorithmus”: 32 Jahre
- Bester derzeit bekannter Algorithmus: 22 Sekunden!



# Erkenntnis

Der “Schul-Algorithmus” zum Multiplizieren von zwei Zahlen ist nicht optimal!

Es gibt viele Multiplikations-Algorithmen, die besser sind.

**Vergleich:** Multipliziere zwei Zahlen mit 100.000.000 Stellen:

- “Schul-Algorithmus”: 32 Jahre
- Bester derzeit bekannter Algorithmus: 22 Sekunden!

**Fazit:** Analyse von Algorithmen ist nützlich und wichtig!

