Computer Algebra
Projekt „Symbolische Summation“

Christoph Koutschan

Research Institute for Symbolic Computation
Johannes Kepler Universität Linz, Austria

10. Februar 2008

Was heißt „Symbolische Summation“?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Was heißt „Symbolische Summation“?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Numerische Rechnung:

$1.00000 + 0.250000 + 0.111111 + 0.0625000 + 0.0400000 + 0.0277778 + 0.0204082 + 0.0156250 + 0.0123457 + 0.010000 = 1.54977$

Was heißt „Symbolische Summation“?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Numerische Rechnung:

$1.00000 + 0.250000 + 0.111111 + 0.0625000 + 0.0400000 + 0.0277778 + 0.0204082 + 0.0156250 + 0.0123457 + 0.010000 = 1.54977$

Exakte Rechnung:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} = \frac{1968329}{1270080}$$

Was heißt „Symbolische Summation"?

Numerische Rechnung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2} = 1.62513$

Was heißt „Symbolische Summation“?

Numerische Rechnung: $$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2} = 1.62513$$

Exakte Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2} = \frac{3121579929551692678469635660835626209661709}{1920815367859463099600511526151929560192000}$$

Was heißt „Symbolische Summation“?

Numerische Rechnung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2} = 1.62513$

Exakte Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k^2} = \frac{3121579929551692678469635660835626209661709}{1920815367859463099600511526151929560192000}$$

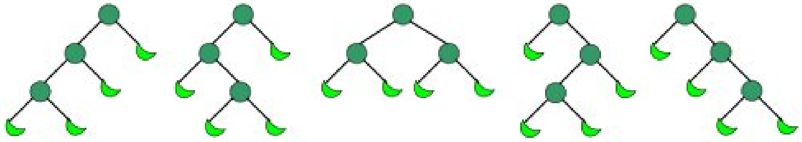
Symbolische Rechnung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Kombinatorik

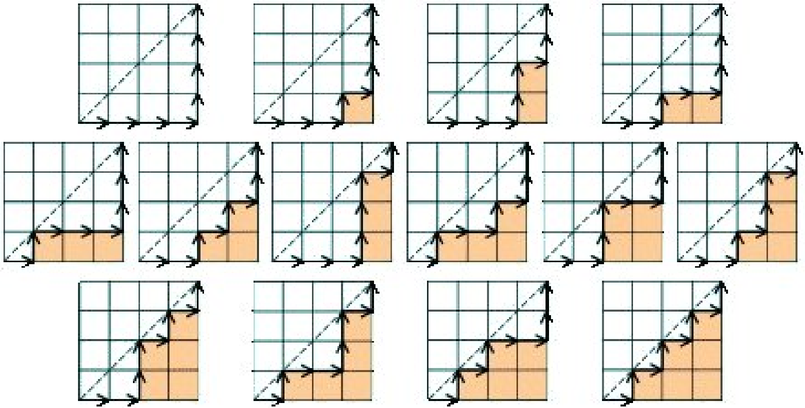
Typische Fragestellungen:

- Rubikwürfel: Anzahl der möglichen Positionen
- Lottozahlen: Chance eines Gewinns
- Geburtstagsparadoxon: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 23 Personen zwei am selben Tag Geburtstag haben?

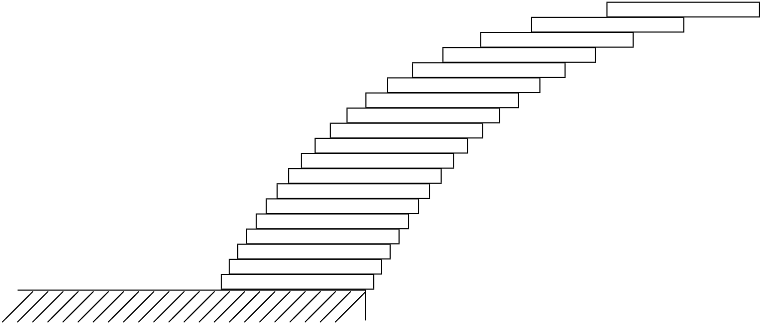
Kombinatorische Objekte: Bäume



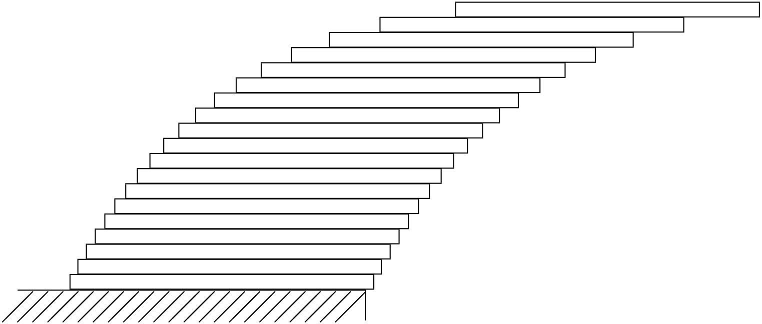
Kombinatorische Objekte: Pfade



Bücherstapel



Bücherstapel (korrekt)



Sprache der Kombinatorik

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

Pochhammersymbol: $(a)_k = a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot (a+k-1)$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Summation

$$\sum_{n=0}^{m} n^4 = \frac{m(1+m)(1+2m)(-1+3m+3m^2)}{30}$$

$$\sum_{n=0}^{m} n \frac{(n-\frac{1}{2})!^2}{(n+1)!^2} \quad = 4\pi - \frac{(2m+1)^2(3m+4)(m-\frac{1}{2})!^2}{(m+1)!^2}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!27^n} = -\frac{9}{2} + \frac{(200+261m+81m^2)(2+3m)!}{40 \cdot 27^m m!(1+m)!(2+m)!}$$

$\longrightarrow$ Lösbar mit dem Algorithmus von Gosper (1978)!