



Mathematik = Rechnen ?

Der Computer (genauer gesagt: das Computer-Programm *Mathematica*) beantwortet diese Frage sehr schnell:

```
Mathematik === Rechnen
```

```
False
```



Was ist Mathematik dann ?



Lösen von Gleichungen.



Bestimmen von optimalen Werten (günstigste Kosten, kürzeste Wege, schnellste Verbindungen, etc.).



Bestimmen von Grenzwerten, an die sich eine Folge von Zahlen annähert.



Berechnen geometrischer Konfigurationen (Schnittpunkte, Tangenten, Abstände, Winkel, etc.).



etc.

Was ist das Gemeinsame ?

■ Aus *bekannten Werten* können *unbekannte Werte* mit *gewünschten Eigenschaften* durch das Ausnutzen *bestimmter Zusammenhänge* bestimmt werden.

■ Mathematische Problemstellungen können meist in der Form

Gegeben: ...

Gesucht: ...

sodass: ...

beschrieben werden.

■ Die Lösung eines mathematischen Problems besteht nun darin, jene *Zusammenhänge (Formeln, Verfahren)* zu finden, die es erlauben, für *beliebige gegebene Werte* jene *gesuchten Werte* mit den *gewünschten Eigenschaften* zu ermitteln.

■ Das bedeutet aber, dass man *zuerst belegen* muss, dass diese Zusammenhänge *immer* — zumindestens unter bestimmten Voraussetzungen — *gelten*. Erst dann können die *Formeln und Verfahren (sogenannte Algorithmen)* verwendet werden, um für *konkrete gegebene Werte* die *konkret gesuchten Werte* zu ermitteln.

Beispiele

■ Lösen von Gleichungen

Es gilt für alle p, q und x :

$$\text{wenn } x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} ,$$

$$\text{dann gilt: } x^2 + p x + q = 0 .$$

Daher ist $-1 + \sqrt{5}$ eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x - 4 = 0$.

■ Bestimmen von optimalen Werten

Es gilt für alle Funktionen f und alle Werte x :

$$\text{wenn } f'(x) = 0 \text{ und } f''(x) < 0 ,$$

dann gilt: x ist ein lokales Maximum von f .

Daher ist $-1 + \sqrt{5}$ ein lokales Maximum der Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 12x$.

$$f[x_] = -x^3 - 3x^2 + 12x;$$

$$\partial_x f[x]$$

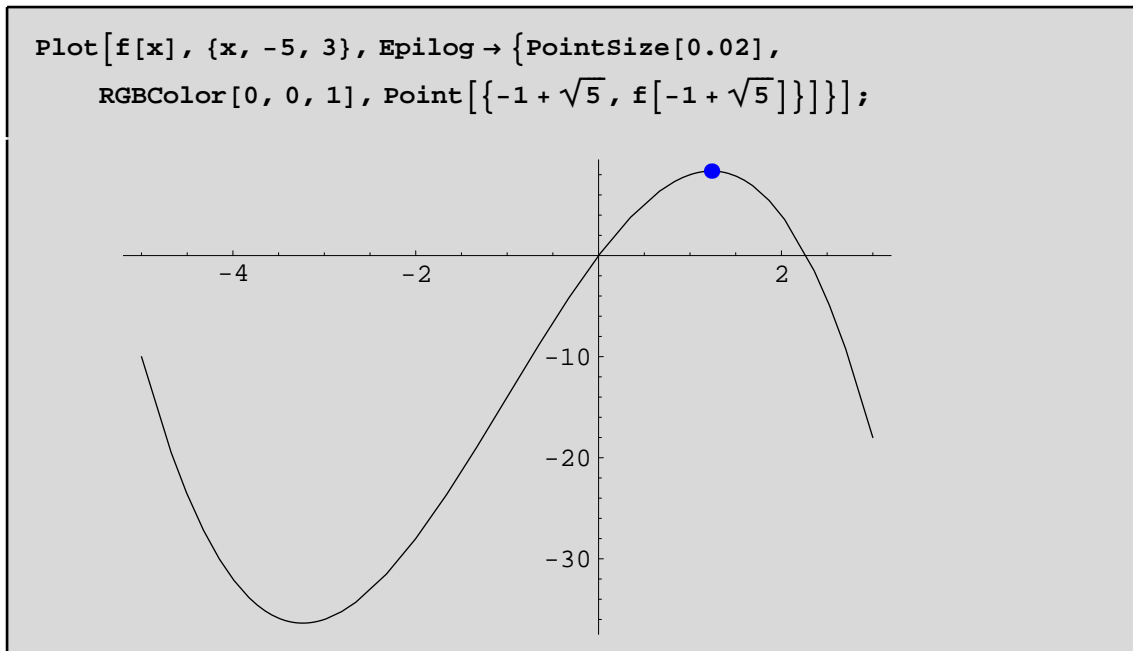
$$12 - 6x - 3x^2$$

$$\text{Solve}[\partial_x f[x] == 0]$$

$$\{\{x \rightarrow -1 - \sqrt{5}\}, \{x \rightarrow -1 + \sqrt{5}\}\}$$

$$\partial_{x,x} f[x] /. \{\{x \rightarrow -1 - \sqrt{5}\}, \{x \rightarrow -1 + \sqrt{5}\}\} // N$$

$$\{13.4164, -13.4164\}$$



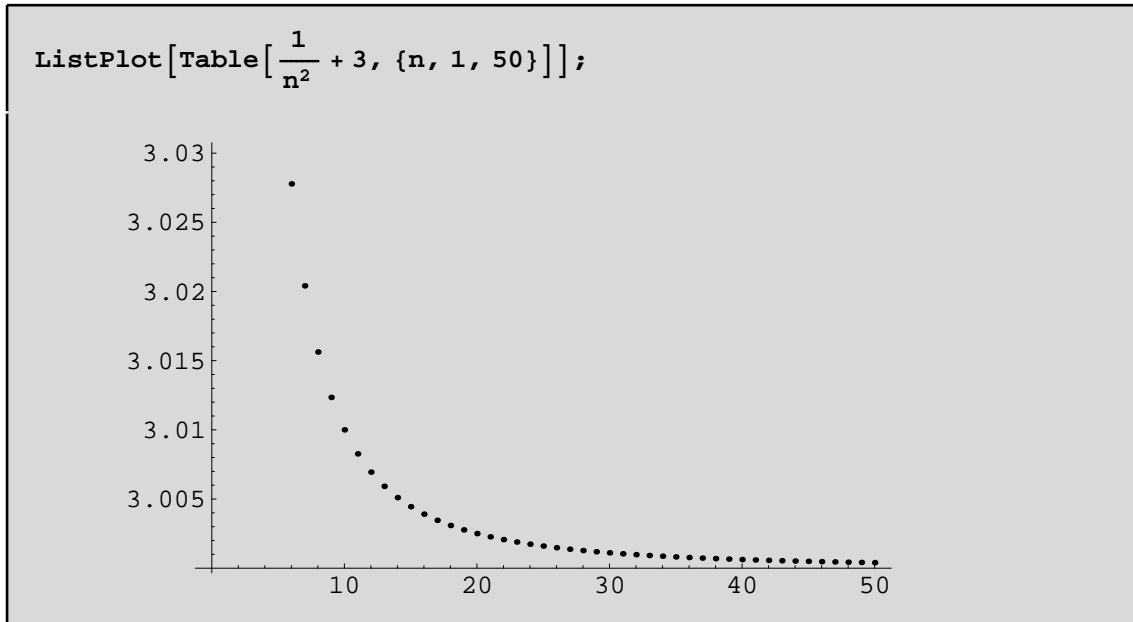
■ Bestimmen von Grenzwerten

Es gilt für alle Zahlenfolgen f und g und alle Zahlen a und b :

wenn f sich a nähert und g sich b nähert,

dann nähert sich die Summenfolge von f und g dem Wert $a + b$.

Daher nähert sich die Summenfolge $\frac{1}{n^2} + 3$ dem Wert 3.



■ Berechnen geometrischer Konfigurationen

Es gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c und Katheten a und b :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Mathematik ist ...

... eine [spiralförmige Entwicklung](#), in der

- das Berechnen,
- das Beobachten von Resultaten,
- das Vermuten von Zusammenhängen,
- das [Beweisen](#) der Zusammenhänge,
- das verbesserte Berechnen auf Basis der bewiesenen Zusammenhänge,
- etc.

abwechseln.



Was brauchen wir dazu ?



Eine exakte Sprache, in der wir die Zusammenhänge formulieren können.



Ein Regelwerk, das uns beim Erstellen von Beweisen behilflich ist.



Womit werden wir uns im Projekt beschäftigen ?

- Beweistechniken, die das Erstellen von Beweisen erleichtern bzw. ermöglichen.
- Erstellen von Beweisen verschiedenster mathematischer Aussagen.
- Entwickeln von mathematischen Lösungs-Algorithmen.
- Zusammenhang Beweis — Algorithmus.
- Stellenwert der Sprache in der Mathematik.