Beweisen

ggT − Größter gemeinsamer Teiler

1.Methode: Primfaktorenzerlegung

```
In[8]:= FactorInteger[{34756}]
        FactorInteger[{6732}]

Out[8]= {{{2, 2}, {8689, 1}}}

Out[9]= {{{2, 2}, {3, 2}, {11, 1}, {17, 1}}}
```

2.Methode: Subtrahieren und Vertauschen

Behauptung: $\text{ggT}[A, B] = \text{ggT}[A-B, B]$ für: $A > B$

Beweis: 1.) 1.$D \mid A$
2.$D \mid B$
3. für alle c: wenn $c \mid A$ und $c \mid B$
dann $c \mid D$

2.) 1.$D \mid (A-B)$
2.$D \mid B$
3.für alle c: wenn $c \mid (A-B)$ und $c \mid B$
dann $c \mid D$

3.) 1.

$$D \mid A \longrightarrow D * x = A$$
$$D \mid B \longrightarrow D * y = B$$

$$D * x - D * y = A - B$$
$$D * (x - y) = A - B$$

2. $D \mid B \longrightarrow D \mid B$

3.

$$c \mid (A-B) \longrightarrow c * x = A - B$$
$$c \mid B \longrightarrow c * y = B$$

$$c * (x+y) = A$$

In[10]:=
```
Clear[ggt1]
ggt1[a_, b_] /; a > b := Module[{},
  Print["Subtrahiere : a = ", a, " b = ", b]; ggt1[a - b, b] ]
 ggt1[a_, b_] /; b > a :=
  Module[{}, Print["Vertausche: a = ", a, " b = ", b]; ggt1[b, a]]
ggt1[a_, a_] := a
```

In[14]:=
```
ggt1[34756, 6732]
```

```
Subtrahiere : a = 34756 b = 6732

Subtrahiere : a = 28024 b = 6732

Subtrahiere : a = 21292 b = 6732

Subtrahiere : a = 14560 b = 6732

Subtrahiere : a = 7828 b = 6732

Vertausche: a = 1096 b = 6732

Subtrahiere : a = 6732 b = 1096

Subtrahiere : a = 5636 b = 1096

Subtrahiere : a = 4540 b = 1096

Subtrahiere : a = 3444 b = 1096

Subtrahiere : a = 2348 b = 1096

Subtrahiere : a = 1252 b = 1096

Vertausche: a = 156 b = 1096

Subtrahiere : a = 1096 b = 156

Subtrahiere : a = 940 b = 156

Subtrahiere : a = 784 b = 156

Subtrahiere : a = 628 b = 156

Subtrahiere : a = 472 b = 156

Subtrahiere : a = 316 b = 156

Subtrahiere : a = 160 b = 156

Vertausche: a = 4 b = 156

Subtrahiere : a = 156 b = 4

Subtrahiere : a = 152 b = 4

Subtrahiere : a = 148 b = 4

Subtrahiere : a = 144 b = 4

Subtrahiere : a = 140 b = 4

Subtrahiere : a = 136 b = 4

Subtrahiere : a = 132 b = 4

Subtrahiere : a = 128 b = 4

Subtrahiere : a = 124 b = 4

Subtrahiere : a = 120 b = 4

Subtrahiere : a = 116 b = 4

Subtrahiere : a = 112 b = 4

Subtrahiere : a = 108 b = 4
```

```
Subtrahiere : a = 104 b = 4
Subtrahiere : a = 100 b = 4
Subtrahiere : a = 96 b = 4
Subtrahiere : a = 92 b = 4
Subtrahiere : a = 88 b = 4
Subtrahiere : a = 84 b = 4
Subtrahiere : a = 80 b = 4
Subtrahiere : a = 76 b = 4
Subtrahiere : a = 72 b = 4
Subtrahiere : a = 68 b = 4
Subtrahiere : a = 64 b = 4
Subtrahiere : a = 60 b = 4
Subtrahiere : a = 56 b = 4
Subtrahiere : a = 52 b = 4
Subtrahiere : a = 48 b = 4
Subtrahiere : a = 44 b = 4
Subtrahiere : a = 40 b = 4
Subtrahiere : a = 36 b = 4
Subtrahiere : a = 32 b = 4
Subtrahiere : a = 28 b = 4
Subtrahiere : a = 24 b = 4
Subtrahiere : a = 20 b = 4
Subtrahiere : a = 16 b = 4
Subtrahiere : a = 12 b = 4
Subtrahiere : a = 8 b = 4
```

Out[14]= 4

3.Methode: Euklidscher Algorithmus

Behauptung: $\text{ggT}[A, B] = \text{ggT}[A - k*B, B]$

Beweis: 1.) 1. $D \mid A$
2. $D \mid B$
3. für alle c: wenn $c \mid A$ und $c \mid B$
dann $c \mid D$

2.) 1.$D \mid (A - k*B)$
2.$D \mid B$
3. für alle c: wenn $c \mid (A - k*B)$ und $c \mid B$
dann $c \mid D$

3.) 1. $D \mid B \longrightarrow D \mid (k*B)$
$D \mid A,\ D \mid (k*B) \longrightarrow D \mid (A - k*B)$

2. $D \mid B \longrightarrow D \mid B$

3. $C \mid (A - k*B) \longrightarrow C * x = A - k * B$
$C \mid (k * B) \longrightarrow C * y =$
$k * B$

$$C * (x + y) = A$$

```
In[15]:= Clear[ggt2]
         ggt2[a_, 0] := a
         ggt2[a_, b_] /; a > b :=
          Module[{}, Print[" a = ", a, " b = ", b]; ggt2[b, Mod[a, b]]]
         ggt2[a_, b_] /; a < b := ggt2[b, a]
```

```
In[19]:= ggt2[34756, 6732]

         a = 34756 b = 6732

         a = 6732 b = 1096

         a = 1096 b = 156

         a = 156 b = 4

Out[19]= 4
```