



Automatisches Beweisen

von Mark, Moritz, Johannes, Jonas*2, Niki*2, Andi, Lara, Felix, Louisa

Referenten: Bernardo Rossi, Johannes Pargfrieder

Inhalte

- Arbeitsablauf
- Satz von Thales
- Sage Math
- Eulersche Gerade

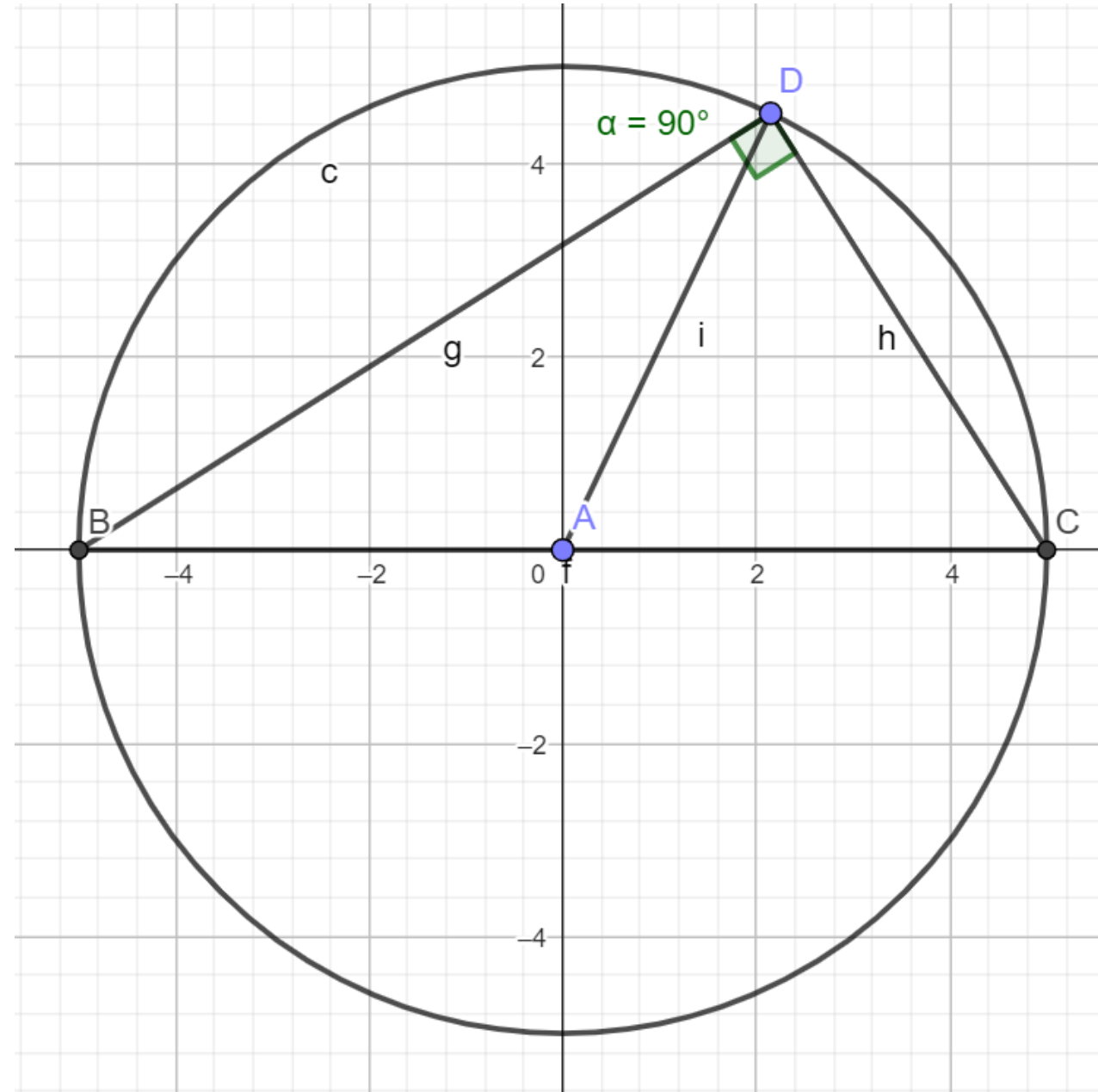


Arbeitsschritte

- Vom geometrischen Problem zum algebraischen Problem
- Vom algebraischen Problem zum Gleichungssystem
- Implementation des Gleichungssystems in SageMath
- Überprüfung der Lösbarkeit des Gleichungssystems in SageMath
- **Bewiesen wenn nicht lösbar**

Satz von Thales

Sei BCD ein Dreieck und sei A der Mittelpunkt \overline{BC} . Wenn die Strecken \overline{AB} und \overline{AD} gleich lang sind, so ist der Winkel $\sphericalangle CDB$ ein rechter Winkel



A ist Mittelpunkt von BC:

$$2 \cdot a_1 - b_1 - c_1 = 0$$

$$2 \cdot a_2 - b_2 - c_2 = 0$$

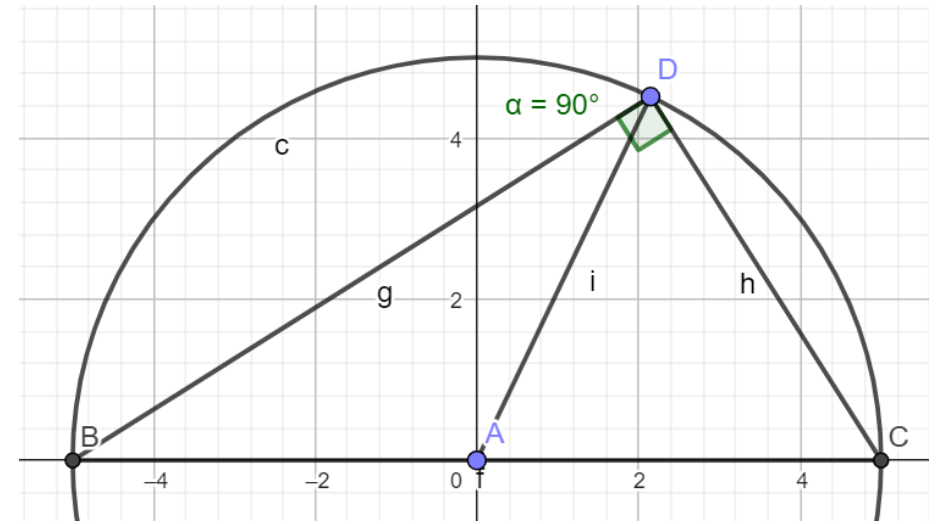
AB und AD sind gleich lang:

$$(a_1 - b_1)^2 - (a_1 - d_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 - (a_2 - d_2)^2 = 0$$

Aus diesen Aussagen folgt:

Der Winkel in CDB ist rechtwinkelig:

$$(b_1 - d_1) \cdot (c_1 - d_1) + (b_2 - d_2) \cdot (c_2 - d_2) = 0$$



$P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu $\neg(P \wedge \neg Q)$

Wir führen die Variable z ein um das Ungleich zu ersetzen.

$P \neq \emptyset$ wird umgeschrieben in $P * z - 1 = 0$

$$2 * a_1 - b_1 - c_1 = 0$$

$$2 * a_2 - b_2 - c_2 = 0$$

$$(a_1 - b_1)^2 - (a_1 - d_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 - (a_2 - d_2)^2 = 0$$

$$((b_1 - d_1) * (c_1 - d_1) + (b_2 - d_2) * (c_2 - d_2)) * z - 1 = 0$$



Sage Math

Auf Python basierendes Mathematik Modul

```
Variablen( ' a1, a2, b1, b2, c1, c2, d1, d2, z1, z2 ' )
```

```
A = (a1, a2)
```

```
B = (b1, b2)
```

```
C = (c1, c2)
```

```
D = (d1, d2)
```

```
Loesung([
```

```
    Mittelpunkte(B, C, A),
```

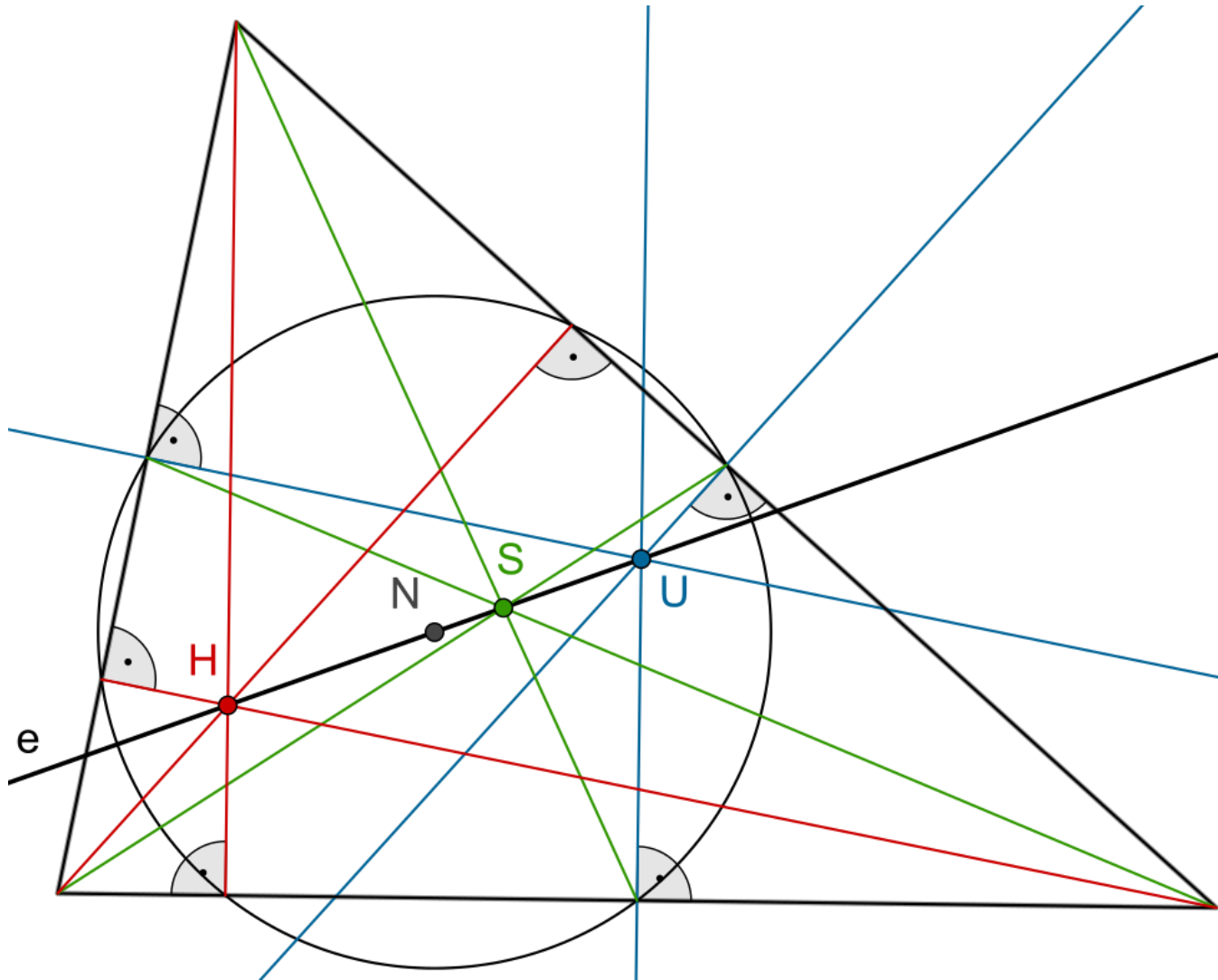
```
    Abstandsquadrat(A, B) - Abstandsquadrat(A, D),
```

```
    Abstandsquadrat(B, C) * z1 - 1,
```

```
    Skalarprodukt(B, D, D, C) * z2 - 1])
```

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, Beweis erfolgreich.

Eulersche Gerade



$$\begin{aligned}
 & -a2*b1 + a1*b2 + a2*i1 - b2*i1 - a1*i2 + b1*i2 = 0 \\
 & -b2*c1 + b1*c2 + b2*h1 - c2*h1 - b1*h2 + c1*h2 = 0 \\
 & -a2*c1 + a1*c2 + a2*j1 - c2*j1 - a1*j2 + c1*j2 = 0 \\
 & b2*f1 + b1*f2 + b2*g1 - f2*g1 - b1*g2 + f1*g2 = 0 \\
 & -c2*e1 + c1*e2 + c2*g1 - e2*g1 - c1*g2 + e1*g2 = 0 \\
 & -a2*h1 + a1*h2 + a2*k1 - h2*k1 - a1*k2 + h1*k2 = 0 \\
 & -c2*i1 + c1*i2 + c2*k1 - i2*k1 - c1*k2 + i1*k2 = 0
 \end{aligned}$$

$$(-a1 - b1 + 2*e1, -a2 - b2 + 2*e2) = 0$$

$$(-b1 - c1 + 2*d1, -b2 - c2 + 2*d2) = 0$$

$$(-a1 - c1 + 2*f1, -a2 - c2 + 2*f2) = 0$$

$$-(a1 - h1)*(b1 - c1) - (a2 - h2)*(b2 - c2) = 0$$

$$-(a1 - b1)*(c1 - i1) - (a2 - b2)*(c2 - i2) = 0$$

$$(b1 - c1)*(d1 - l1) + (b2 - c2)*(d2 - l2) = 0$$

$$(a1 - c1)*(f1 - l1) + (a2 - c2)*(f2 - l2) = 0$$

$$-(a1 - c1)*(b1 - j1) - (a2 - c2)*(b2 - j2) = 0$$

$$((a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2)*z2 - 1 = 0$$

$$((b1 - c1)^2 + (b2 - c2)^2)*z3 - 1 = 0$$

$$((a1 - c1)^2 + (a2 - c2)^2)*z4 - 1 = 0$$

$$-(g2*k1 - g1*k2 - g2*l1 + k2*l1 + g1*l2 - k1*l2)*z1 - 1 = 0$$

Beweis der Eulerschen Gerade

```
Variablen("b2,c1,c2,d1,d2,e2,f1,f2,g1,g2,h1,h2,i1,i2,j1,j2,k1,k2,l1,l2,z1,z2,z3,z4")
A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L = (0, 0), (0,b2), (c1,c2), (d1,d2), (0,e2), \
    (f1,f2), (g1,g2),(h1,h2), (i1,i2), (j1,j2), (k1,k2), (l1,l2)
Loesung(
    applyList(kollinear, [(A, B, I), (B, C, H), (A, C, J), (G, B, F),
        (G, C, E), (K, A, H), (K, C, I)])
+ applyList(Mittelpunkte, [(A, B, E), (B, C, D), (A, C, F)])
+ applyList(Skalarprodukt, [(H, A, B, C), (I, C, A, B), (C, B, L, D),
    (C, A, L, F), (J, B, A, C)])
+ applyNegList(Abstandsquadrat, [(A, B), (B, C), (A, C)], [z2, z3, z4])
+ [kollinear(L, G, K)*z1-1])
```

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, Beweis erfolgreich.

