Zerstörungsfreie Materialprüfung

Projekt 3

Andreas Neubauer

Institut für Industriemathematik
Johannes Kepler Universität Linz

Teilnehmer: Bianca Brandl, Stefanie Hartl, Tobias Hermann, Jannik Hildebrandt, Johanna Hofer, Laura Kaltenbrunner, Simon Kirchweger, Sebastian Lang, Anna Oelsch, Michael Rußmann, Dominik Schaffer, Julia Thumfart

9. - 13. Februar 2014

Problembeschreibung

Bei unserem Problem will man die Struktur eines Körpers im Innern bestimmen, ohne ihn zerstören zu müssen.

Diese Frage stellt sich in verschiedenen praktischen Anwendungen:

- Feststellung von Blasen oder Rissen in einem Werkstück
- Computertomographie

Anhand von Röntgenstrahlen kann man die Dichteverteilung im Inneren des Körpers bestimmen.

Dieses Problem wurde mathematisch bereits 1917 vom österreichischen Mathematiker Johann Radon (1887-1956) gelöst.

Problembeschreibung

Bei unserem Problem will man die Struktur eines Körpers im Innern bestimmen, ohne ihn zerstören zu müssen.

Diese Frage stellt sich in verschiedenen praktischen Anwendungen:

- Feststellung von Blasen oder Rissen in einem Werkstück
- Computertomographie

Anhand von Röntgenstrahlen kann man die Dichteverteilung im Inneren des Körpers bestimmen.

Dieses Problem wurde mathematisch bereits 1917 vom österreichischen Mathematiker Johann Radon (1887-1956) gelöst.

Problembeschreibung

Bei unserem Problem will man die Struktur eines Körpers im Innern bestimmen, ohne ihn zerstören zu müssen.

Diese Frage stellt sich in verschiedenen praktischen Anwendungen:

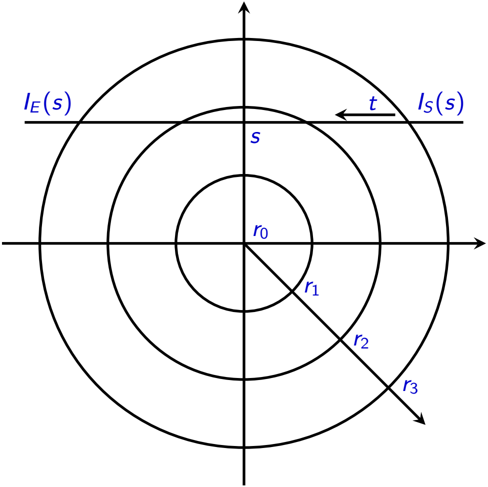
- Feststellung von Blasen oder Rissen in einem Werkstück
- Computertomographie

Anhand von Röntgenstrahlen kann man die Dichteverteilung im Inneren des Körpers bestimmen.

Dieses Problem wurde mathematisch bereits 1917 vom österreichischen Mathematiker Johann Radon (1887-1956) gelöst.

Eindimensionales Modell

Wir beschränken uns auf den rotationssymmetrischen Fall, d.h. die Dichte hängt nur vom Radius ab.



Diskretisierung

Physikalische Überlegungen zeigen, dass für den Energieverlust folgende Gleichung gilt:

$$\frac{d}{dt}\ln(I(-t,s)) = -f(\sqrt{s^2+t^2})$$

Dieses Problem ist i.a. nicht exakt lösbar.

Ein möglicher Lösungsansatz besteht darin, die gesuchte Funktion f durch eine stückweise konstante Funktion anzunähern.

Lineares Gleichungssystem

Für diesen Ansatz führt obige Differentialgleichung auf dieses lineare Gleichungssystem:

$$g_j = \frac{2}{n} \sum_{i=j}^{n} f_i z_{ij}$$

mit

$$z_{ij} := \sqrt{i^2 - (j-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2 - (j-1)^2}\,, \quad i \geq j\,.$$

Dieses lässt sich rekursiv auflösen:

$$f_j = \frac{\frac{n\,g_j}{2} - \sum_{i=j+1}^{n} f_i z_{ij}}{z_{jj}}\,, \quad j = n, n-1, \ldots, 1\,.$$

Lineares Gleichungssystem

Für diesen Ansatz führt obige Differentialgleichung auf dieses lineare Gleichungssystem:

$$g_j = \frac{2}{n} \sum_{i=j}^{n} f_i z_{ij}$$

mit

$$z_{ij} := \sqrt{i^2 - (j-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2 - (j-1)^2}\,, \quad i \geq j\,.$$

Dieses lässt sich rekursiv auflösen:

$$f_j = \frac{\dfrac{n\,g_j}{2} - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} f_i z_{ij}}{z_{jj}}\,, \quad j = n, n-1, \ldots, 1\,.$$

Regularisierung

Leider liegen in der Praxis niemals exakte Daten vor.
Sie sind immer mit Messfehlern behaftet.

Um trotzdem brauchbare Ergebnisse zu bekommen, muss das Problem regularisiert werden:

$$f_j^{\alpha,\delta} = \frac{\dfrac{n\, g_j^\delta}{2} - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} f_i^{\alpha,\delta} z_{ij}}{z_{jj} + n\,\alpha}\,, \quad j = n, n-1, \ldots, 1\,.$$

Durch Lösen einer falschen Gleichung $(\alpha > 0)$ erhält man eine bessere Lösung !! – Lösung mit Mathematica

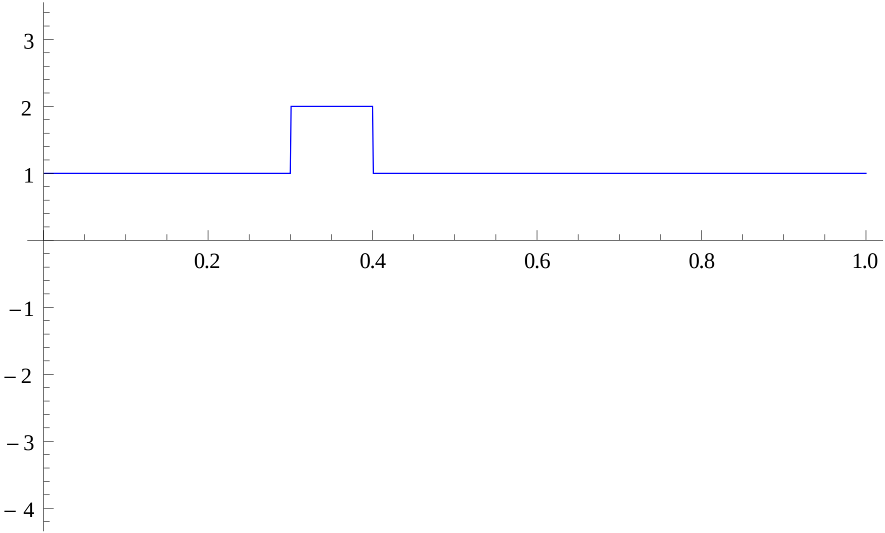
Regularisierung

Leider liegen in der Praxis niemals exakte Daten vor.
Sie sind immer mit Messfehlern behaftet.

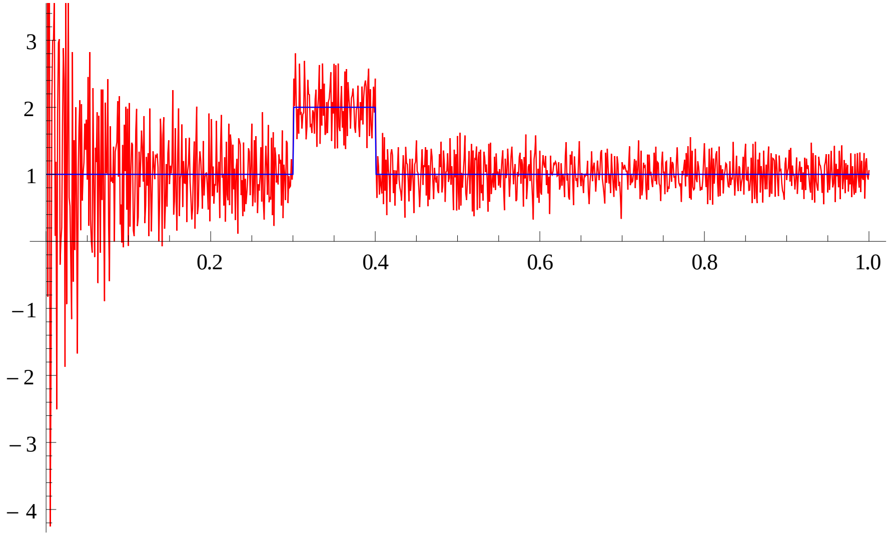
Um trotzdem brauchbare Ergebnisse zu bekommen, muss das Problem regularisiert werden:

$$f_j^{\alpha,\delta} = \frac{\dfrac{n\, g_j^{\delta}}{2} - \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} f_i^{\alpha,\delta} z_{ij}}{z_{jj} + n\,\alpha}\,, \quad j = n, n-1, \dots, 1\,.$$

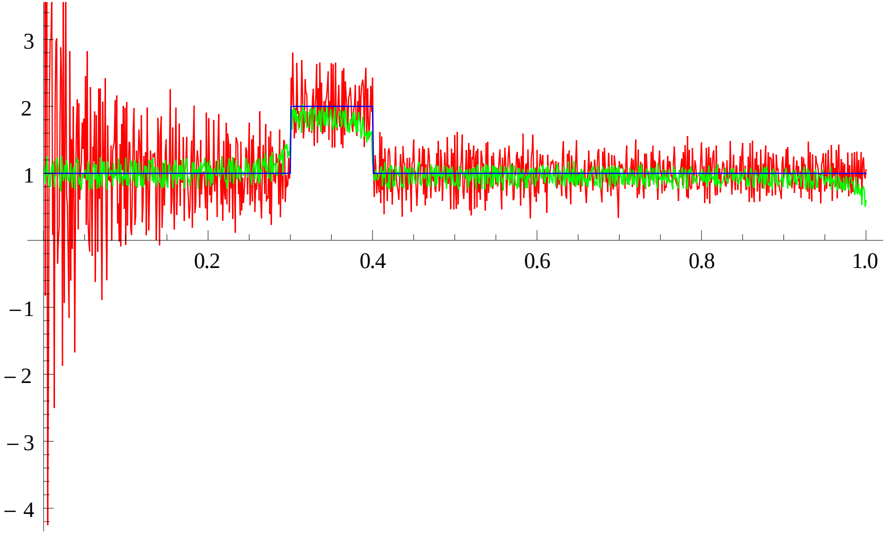
Durch Lösen einer falschen Gleichung $(\alpha > 0)$ erhält man eine bessere Lösung !! – Lösung mit Mathematica



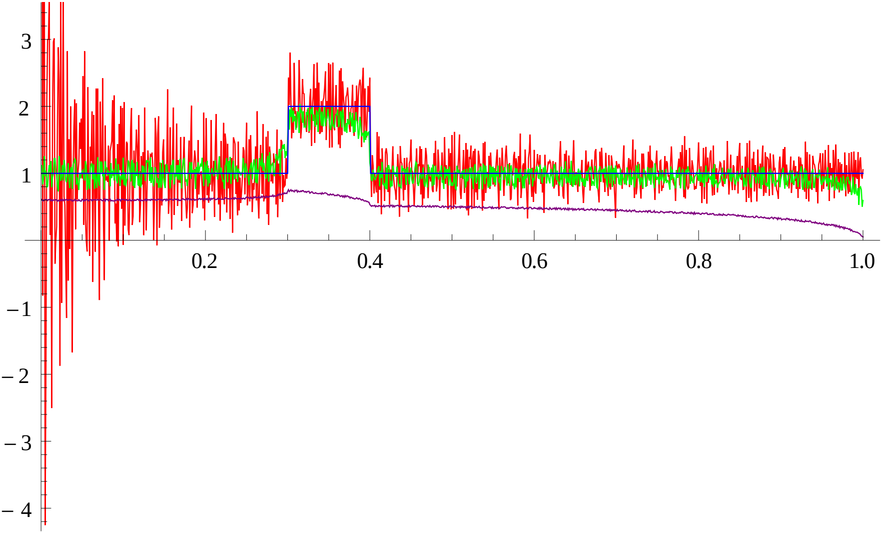
blau: exakte Lösung



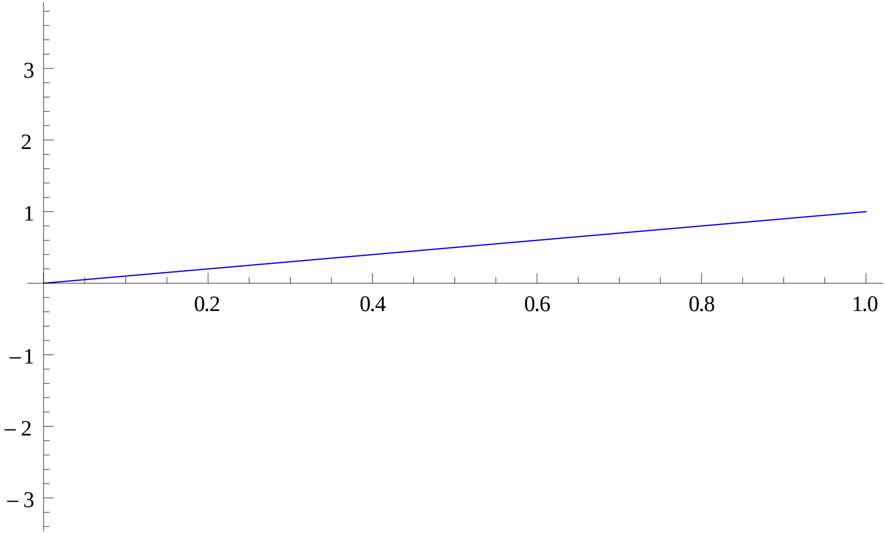
blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$



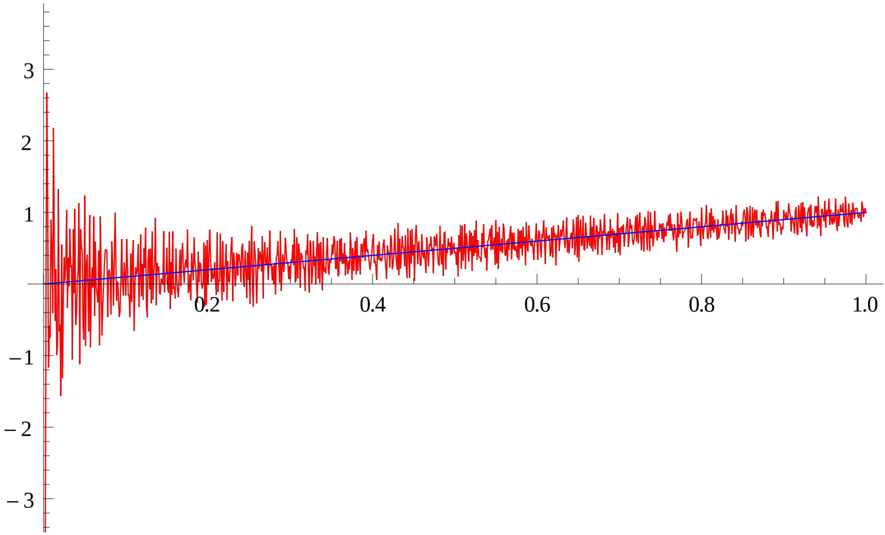
blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$, grün: $\alpha = 0.05$



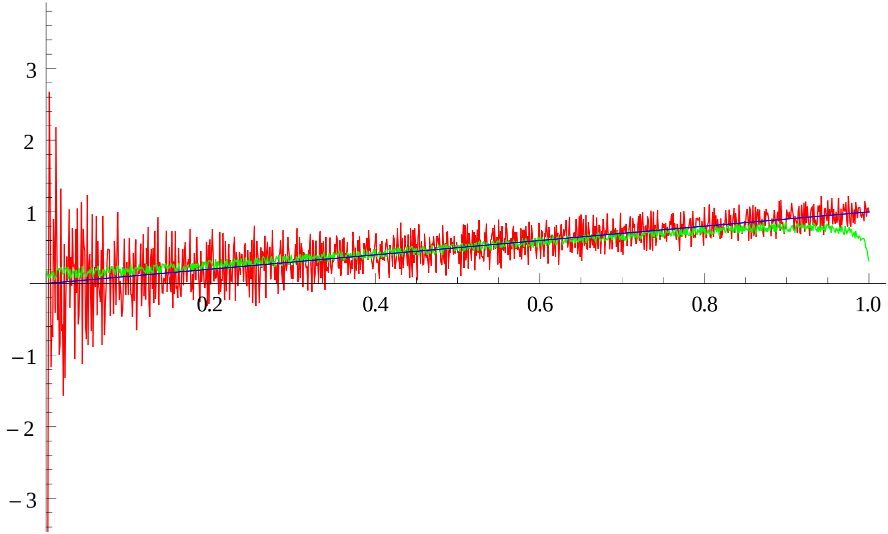
blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$, grün: $\alpha = 0.05$, lila: $\alpha = 1$



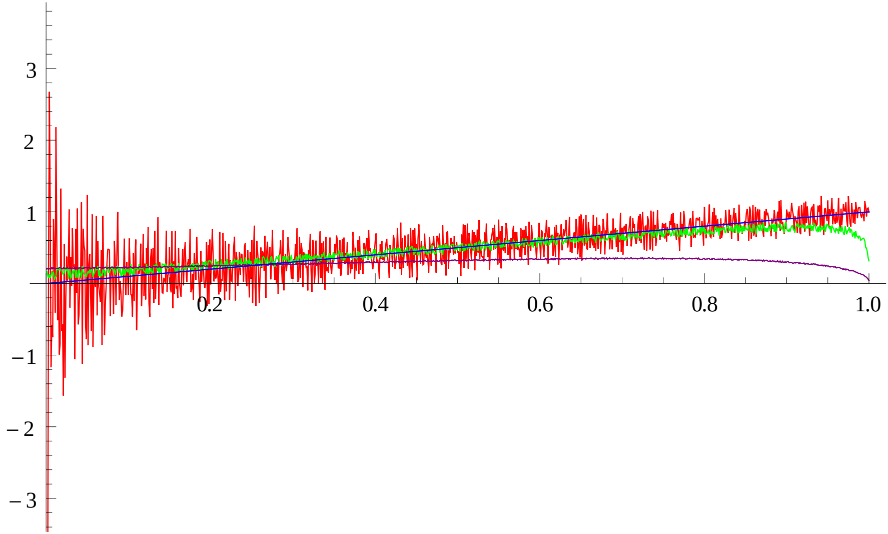
blau: exakte Lösung



blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$



blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$, grün: $\alpha = 0.1$



blau: exakt, $n = 1000$, $\delta = 1\%$, rot: $\alpha = 0$, grün: $\alpha = 0.1$, lila: $\alpha = 1$