# Schachbrettprobleme

## Schachbrett I

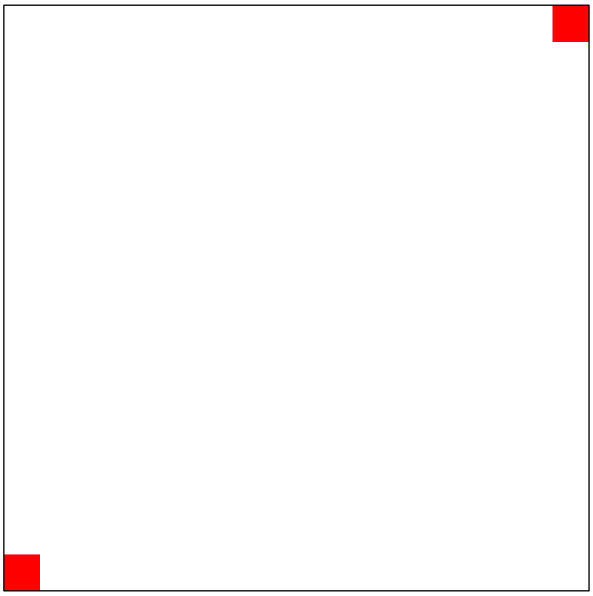
■

### ■ Problemstellung

■

Ist eine Fläche mit einer Seitenlänge von $2n * 2n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), von der zwei Felder an diagonal gegenüberliegenden Ecken fehlen, mit Steinen auslegbar die eine Seitenlänge von $2 * 1$ haben, sodass jedes Feld belegt ist und sich keine Steine überdecken?

```
Show[Chessboard2[8]]
```



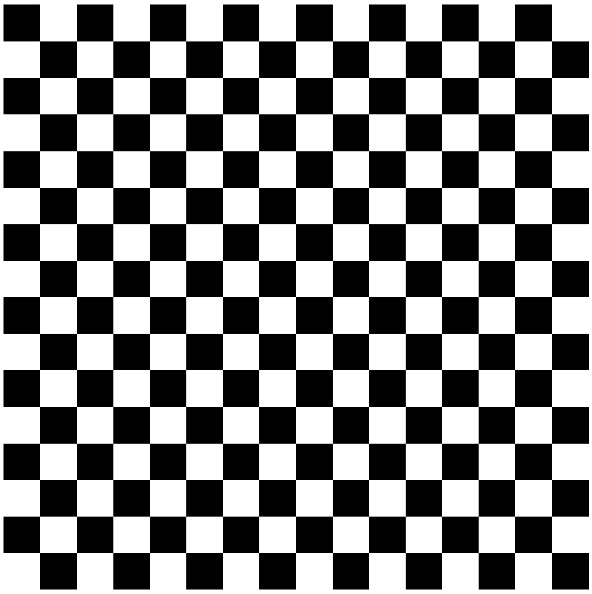
```
- Graphics -
```

### ■ Eigenschaften

#### ■ Annahme

Man stelle sich die Fläche als Schachbrett vor (jedes Feld kann entweder *schwarz* oder *weiß* sein, die Nachbarn eines Feldes haben eine andere Farbe als das Feld selbst).

```
Show[EmptyChessboard[8]]
```



```
- Graphics -
```

### 1.

Das Schachbrett muss eine *gerade* Feldanzahl haben, weil jeder Stein *zwei* Felder belegt.

### 2.

Die Anzahl der schwarzen Felder ist *gleich* der Anzahl der weißen Felder.

### 3.

Alle Felder auf einer *Diagonalen* haben die *gleiche* Farbe.

### 4.

Jeder Stein belegt genau ein *schwarzes* und ein *weißes* Feld.

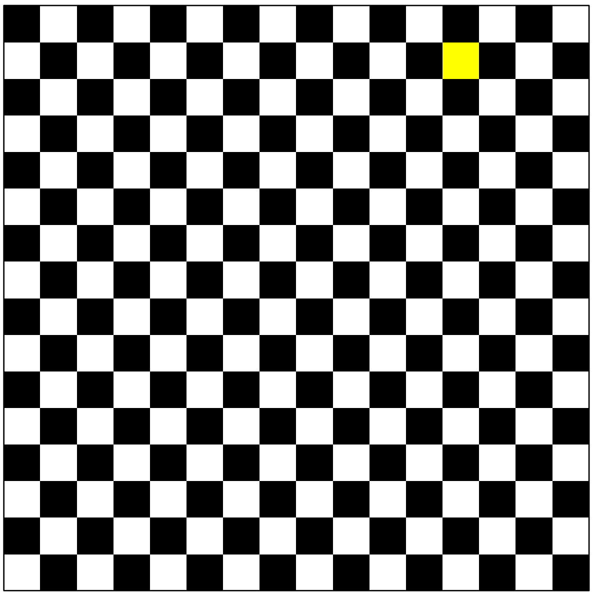
## Lösung

Wir nehmen an, dass die Problemstellung mit den oben genannten Eigenschaften lösbar ist.
Aus Eigenschaft 3 geht hervor, dass die zwei fehlenden Felder die gleiche Farbe besitzten.
Dadurch, dass Eigenschaft 2 nicht mehr erfüllt ist, kann die Fläche nicht mehr ausgelegt werden.

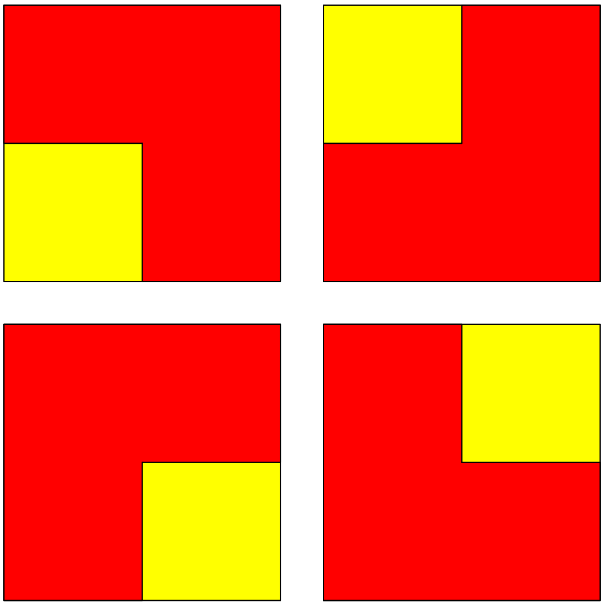
# Schachbrett II

## ▪ Problemstellung

Ist eine Fläche mit einer Seitenlänge von $2^n * 2^n$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, von der ein *beliebiges* Felder fehlt, mit Tromino−Steinen auslegbar die eine Seitenlänge von $2 * 2$ haben, sodass jedes Feld belegt ist und sich keine Steine überdecken?



## ▪ Eigenschaften



Jede 2*2−Fläche von der ein Feld fehlt, ist mit einem Tromino−Stein auslegbar, die eine Seiten länge von 2*2 haben.

## ■ Lösung

Die Lösung erfolgt durch Induktion über alle $n$.

### ■ Induktionsanfang

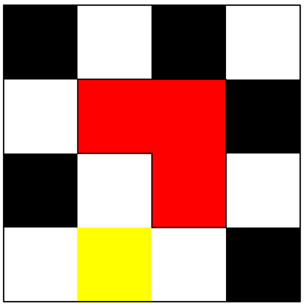
Es ist für $n = 1$ zu zeigen, dass die Problemstellung lösbar ist.(Folgt aus den Eigenschaften)

### ■ Induktionsannnahme

Wir nehmen an, dass die Problemstellung für jedes beliebige n lösbar ist (gültig, weil für $n = 1$ schon gezeigt).

### ■ Induktionsschluss

Zu beweisen ist, dass die Problemstellung für eine Seitenlänge von $2^{n+1}$ lösbar ist.



Durch hinzufügen des roten Steines wird erreicht, dass in jedem Viertel der Fläche ein Problem entsteht, dass der ursprünglichen Problemstellung entspricht, jedoch mit einer halbierten Seitenlänge ($2^n$). Da dass Problem für $2^n$ schon gelöst wurde, ist somit bewiesen, dass das Problem für $2^{n+1}$ gelöst werden kann.

### ■ Algorithmus

Aus diesem Beweis folgt unmittelbar der Algorithmus zum Auslegen eines $2^n$ x $2^n$ Feldes:

1) Falls n=1 wende die Eigenschaft an dass das Problem für alle 2*2 Felder lösbar ist
2) Spalte das Feld in vier gleich große quadratische Teile. Lege einen Stein so, dass die nur 3 Quadranten von denen kein Feld fehlt von dem Stein berührt werden
3) Wende den Algorithmus für alle 4 Quadranten an

Arbeitsweise (anschaulich): Animation mit *Mathematica*.